БАЗИСНОСТЬ РИССА СО СКОБКАМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

А. М. Савчук, И. В. Садовничая

Аннотация. В работе изучается оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$, порожденный в пространстве $\mathbb{H} = (L_2[0,\pi])^2$ дифференциальным выражением

$$\ell_P(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P\mathbf{y}, \quad \text{где}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

и регулярными краевыми условиями

$$U(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix} = 0.$$

Элементы матрицы P предполагаются суммируемыми на $[0,\pi]$ комплекснозначными функциями. Мы покажем, что оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ имеет дискретный спектр, состоящий из собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, причем $\lambda_n = \lambda_n^0 + o(1)$ при $|n| \to \infty$, где $\{\lambda_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — спектр оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ с нулевым потенциалом и теми же краевыми условиями. Если краевые условия сильно регулярны, то спектр оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ является асимптотически простым. Мы покажем, что в этом случае система собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$ (при условии нормировки собственных функций). В случае регулярных, но не сильно регулярных краевых условий все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ двукратны, а собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ асимптотически двукратны. В этом случае мы покажем, что система, составленная из соответствующих двумерных корневых подпространств оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, образует базис Рисса из подпространств (базис Рисса со скобками) в пространстве $\mathbb{H}$.

Содержание

Введение.

Спектральная теория краевых задач общего вида для обыкновенных дифференциальных операторов берет свое начало с работ Г. Биркгофа [22, 23] и Я. Д. Тамаркина

[39, 40, 41]. В этих работах были введены понятия регулярных и сильно регулярных краевых условий, было исследовано асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций. Кроме того, были доказаны теоремы о полноте системы собственных и присоединенных функций и исследована поточечная сходимость спектральных разложений. Исследование свойств безусловной базисности (базисности Рисса) системы корневых векторов для обыкновенных дифференциальных операторов началось в 60-е годы с работ Н. Данфорда, В. П. Михайлова и Г. Кесельмана [28, 12, 7]. Тогда же А. С. Маркусом [11] и В. Э. Кацнельсоном [5] был предложен абстрактный метод, позволяющий доказывать базисность Рисса для возмущений самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Этот метод получил существенное развитие в работах А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см., например, [33]). По поводу применения этого метода к обыкновенным дифференциальным операторам следует отметить статьи А. А. Шкаликова [18, 38, 19]. В нашей работе мы также используем этот метод. Изучение спектральных свойств дифференциальных систем первого порядка

$$iBY' + v(x)Y, \qquad Y = (y_j(x))_1^d,$$

с постоянной $n \times n$ матрицей

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

и $n \times n$ матриц–функцией $v(x)$ началось с работы Г. Биркгофа и Р. Лангера [24]. Из недавних работ, посвященных таким системам, отметим работы М. М. Маламуда, Л. Л. Оридороги и А. А. Лунева [32, 31]. В них введено понятие слабо регулярных краевых условий (для случая системы Дирака оно эквивалентно обычной регулярности) и доказаны теоремы о полноте, минимальности и базисности Рисса системы корневых векторов для случая $v \in L_\infty[a, b]$. Свойствам базисности системы собственных и присоединенных функций системы Дирака посвящена обширная литература. И. Трушин и М. Ямомото [42, 43] установили базисность Рисса в случае $P \in L_2$ и разделенных краевых условий. В серии работ П. Джакова и Б. Митягина (см., например, [25, 26]) изучаются спектральные свойства оператора Дирака (в частности, подробно обсуждается случай периодических, антипериодических и общих регулярных, но не сильно регулярных краевых условий). В [27] изучен оператор Дирака с потенциалом $P \in L_2$ и произвольными регулярными краевыми условиями. Для случая сильно регулярных условий была доказана базисность Рисса, а при отсутствии сильной регулярности — базисность Рисса из подпространств. В недавней работе [37] была доказана базисность Рисса для общего случая суммируемого на $[0, \pi]$ потенциала Q и сильно регулярных краевых условий. Отметим, что в работе А. А. Лунева и М. М. Маламуда [10] также анонсирован этот результат и метод его доказательства, отличный от предложенного в [37]. Необходимо также упомянуть работы различных авторов [20, 1, 9], в которых читатель может найти близкие результаты. Заметим еще, что свойства базисности естественным образом обобщаются до результатов о равносходимости (см. по этой теме обзорную статью [34] и ссылки в ней). Вопросы о равносходимости для системы корневых функций оператора Штурма–Лиувилля с негладкими потенциалами были исследованы вторым автором в работах [16, 35, 17].

Таким образом, результаты этой статьи подготовят базу для доказательства таких теорем в случае системы Дирака.

Настоящая статья организована следующим образом. В первом параграфе приведены предварительные результаты, необходимые для дальнешего. В частности, мы покажем, что достаточно изучить случай $p_1 \equiv p_4 \equiv 0$, сформулируем определение регулярных и сильно регулярных по Биркгофу краевых условий для случая системы Дирака и приведем несколько элементарных фактов об операторе $\mathcal{L}_{0,U}$ с нулевым потенциалом. Во втором параграфе мы получаем асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Отметим, что здесь мы рассматриваем только общий случай $P \in L_1$, хотя наш метод позволяет уточнить оценки остаточных членов в этих формулах для случая $P \in L_p$ (случай $p \in [1, 2]$ разобран в работе [37]) и для шкалы пространств Бесова $P \in B^{\theta}_{1,q}$, $q \in [1, \infty]$, $\theta \geqslant 0$ (этот случай авторы планируют рассмотреть в отдельной работе). Третий параграф посвящен изучению функции Грина оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Мы найдем ее явный вид в терминах фундаментальной системы решений и докажем ограниченность этой функции в полуплоскостях $|\operatorname{Im} \lambda| > \alpha$. Следуя работе [6], мы построим здесь систему собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Также здесь доказана теорема об асимптотическом поведении спектральных проекторов. Результаты о полноте и минимальности системы собственных и присоединенных векторов оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ приведены в четвертом параграфе работы. Отметим, что эти результаты уже были кратко изложены в работе [37]; здесь мы снабдим их полным доказательством. В четвертом параграфе приведены также результаты о базисности Рисса для случая сильно регулярных краевых условий. По сравнению с работой [37] здесь мы несколько модифицировали и упростили доказательство. Наконец, в пятом параграфе работы получен основной результат работы: доказана базисность Рисса из двумерных подпространств для случая произвольного суммируемого потенциала и регулярных, но не сильно регулярных краевых условий. Этот факт был анонсирован в [37]; здесь мы приводим его полное доказательство.

1. Обозначения и предварительные результаты.

Заметим, что существует два альтернативных вида записи системы Дирака. В данной работе мы будем рассматривать систему вида

$$\ell_P(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P\mathbf{y}, \quad \text{где} \tag{1.1}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

в пространстве $\mathbb{H} = L_2[0, \pi] \oplus L_2[0, \pi] \ni \mathbf{y}$. Функции p_j, $j = 1, 2, 3, 4$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0, \pi]$ и комплекснозначными. Краевые условия и область определения оператора будут обсуждаться ниже. Другой формой записи (см., например, [29]) является

$$\ell_Q(\mathbf{u}) = B\mathbf{u}' + Q\mathbf{u}, \quad \text{где} \tag{1.2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_3(x) & q_4(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}.$$

Эти формы записи эквивалентны. Так, замена $u_1 = \frac{1}{2}(y_1+y_2)$, $u_2 = \frac{i}{2}(y_1-y_2)$ сводит систему (1.2) к виду (1.1). Далее мы покажем, что достаточно изучить случай, когда $p_4 = p_1 = 0$ (для системы, записанной в форме (1.2) это эквивалентно равенствам $q_1 = -q_4$, $q_2 = q_3$).

Через $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^t$ будем обозначать вектор–функции на отрезке $[0,\pi]$, а через

$$\langle \mathbf{f},\, \mathbf{g}\rangle = \int_0^\pi (f_1(x)\overline{g_1}(x) + f_2(x)\overline{g_2}(x))\,dx$$

— скалярное произведение в пространстве $\mathbb{H}$. Чтобы не усложнять запись, мы будем писать $\mathbf{f} \in L_p$, имея в виду, что $\mathbf{f} \in L_p[0,\pi]\times L_p[0,\pi]$, или $P \in L_p$, имея в виду, что все компоненты матрицы лежат в L_p. Норму по переменной $x \in [0,\pi]$ в пространстве L_p или в $L_p \times L_p$ будем обозначать $\|\cdot\|_p$.

Перейдем к определению оператора $\mathcal{L}_P$, который мы свяжем с дифференциальным выражением ℓ_P. Прежде всего, определим максимальный оператор

$$\mathcal{L}_{P,M}\,\mathbf{y} := \ell_P(\mathbf{y}); \qquad \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,M}) = \{\mathbf{y} \in AC[0,\pi] : \ell_P(\mathbf{y}) \in \mathbb{H}\}$$

и минимальный оператор $\mathcal{L}_{P,m}$, являющийся сужением оператора $\mathcal{L}_{P,M}$ на область

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,m}) = \{\mathbf{y} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,M}) : \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(\pi) = 0\}.$$

Здесь $AC[0,\pi] = W_1^1[0,\pi]$ — пространство абсолютно непрерывных функций. Поскольку элементы матрицы P — суммируемые функции, оба слагаемых дифференциального выражения $\ell_P(\mathbf{y})$ корректно определены, как функции из L_1. При этом, в область определения оператора входят только те функции $\mathbf{y}$, для которых сумма этих слагаемых принадлежит $\mathbb{H}$. Через $\mathcal{L}_{P^*,M}$ и $\mathcal{L}_{P^*,m}$ будем обозначать максимальный и минимальный операторы, порожденные сопряженным дифференциальным выражением

$$\ell_{P^*}(\mathbf{y}) := B\mathbf{y}' + P^*\mathbf{y}, \qquad \text{где } P^* = \begin{pmatrix} \overline{p_1} & \overline{p_3} \\ \overline{p_2} & \overline{p_4} \end{pmatrix}.$$

Утверждение 1.1 (Формула Лагранжа). *Для любых функций* $\mathbf{f} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,M})$, $\mathbf{g} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P^*,M})$ *справедливо тождество*

(1.3)
$$\langle \mathcal{L}_{P,M}\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathcal{L}_{P^*,M}\mathbf{g}\rangle + [\mathbf{f},\mathbf{g}]_0^\pi, \qquad \text{где } [\mathbf{f},\mathbf{g}]_0^\pi = -i\ f_1(x)\overline{g_1}(x)\big|_0^\pi + i\ f_2(x)\overline{g_2}(x)\big|_0^\pi.$$

Доказательство. Равенство (1.3) получается интегрированием по частям. □

Из этой формулы, в частности, получаем

(1.4) $$\langle \mathcal{L}_{P,M}\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathcal{L}_{P^*,m}\mathbf{g}\rangle, \qquad \mathbf{f} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,M}),\ \mathbf{g} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P^*,m}).$$

В дальнейшем важную роль играет следующее утверждение, которое легко следует из известного результата теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [8, Гл. III §2]).

Теорема i. Пусть $\mathbf{A}(x)$ — матрица размера $n\times n$, элементы которой являются функциями пространства $L_1[0,\pi]$, а $\mathbf{f} \in \big[L_1[0,\pi]\big]^n$ — вектор-функция. Тогда при любом $c \in [0,\pi]$ уравнение

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f},\ \text{ с условием } \mathbf{y}(c) = \xi \in \mathbb{C}^n,$$

имеет единственное решение $\mathbf{y}(\cdot) \in AC[0,\pi]$.

Напомним, что оператор F, действующий в гильбертовом (или банаховом) пространстве H, называется *фредгольмовым*, если его область определения плотна в H, образ замкнут, а дефектные числа $\{\alpha, \beta\}$, равные размерностям ядра и коядра, конечны.

Из утверждения 1.1 и теоремы i сразу следует

Утверждение 1.2. *При любом $\lambda \in \mathbb{C}$ операторы $\mathcal{L}_{P,M} - \lambda I$ и $\mathcal{L}_{P^*,m} - \overline{\lambda} I$ фредгольмовы, являются взаимно сопряженными, а их дефектные числа равны $\{2, 0\}$ и $\{0, 2\}$, соответственно.*

Перейдем к описанию расширений $\mathcal{L}$ оператора $\mathcal{L}_{P,m}$, для которых $\mathcal{L}_{P,m} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{L}_{P,M}$. Заметим, что любой такой оператор имеет область определения

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{y} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,M}) : U_j(\mathbf{y}) = 0, 1 \leqslant j \leqslant \nu\},$$

где U_j — линейные формы от векторов $\mathbf{y}(0)$ и $\mathbf{y}(\pi)$. Эти формы можно считать линейно независимыми и тогда их число ν заключено между 0 и 2. Если мы хотим, чтобы оператор $\mathcal{L}$ имел непустое резольвентное множество, т.е. для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ индексы оператора $\mathcal{L} - \lambda I$ были нулевыми, то, согласно утверждению 1.2, $\nu = 1$. Таким образом, оператор $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{P,U}$ имеет область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,U}) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,M}) : U(\mathbf{y}) = 0\}, \quad \text{где}$$

$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

причем строки матрицы

$$\mathcal{U} := (C, D) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Обозначим через $J_{\alpha\beta}$ определитель, составленный из α-го и β-го столбца матрицы $\mathcal{U}$.

Определение 1.1. Краевое условие, определенное формой U, называется *регулярным* (по Биркгофу), если $J_{14} \cdot J_{23} \neq 0$. Оператор Дирака, порожденный регулярным краевым условием U (т.е. оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ с областью определения (1.5)), будем называть *регулярным*.

Далее в работе мы будем рассматривать только регулярные краевые условия, так как для данной задачи регулярные операторы сохраняют классические асимптотики для собственных значений и собственных функций.

Мы уже говорили выше, что без ограничения общности можно считать функции p_1 и p_4 нулевыми. Сформулируем соответствующее утверждение. Вначале напомним, что если два оператора A_1 и A_2 в гильбертовом пространстве с плотными областями определения подобны, т.е. существует такой ограниченный и ограниченно обратимый оператор T, что $A_2 = T^{-1} A_1 T$, а $\mathfrak{D}(A_2) = T^{-1}\mathfrak{D}(A_1)$, то из замкнутости одного оператора следует замкнутость другого. Подобные операторы имеют одинаковый спектр, в частности, если спектр оператора A_1 состоит из собственных значений $\sigma(A_1) = \{\lambda_n\}$, то и $\sigma(A_2) = \{\lambda_n\}$, причем кратности этих собственных значений для A_1 и A_2 совпадают. Если $\{e_n\}$ — система собственных и присоединенных векторов оператора A_1,

то $\{T^{-1}e_n\}$ — система собственных и присоединенных векторов оператора A_2. Отсюда следует, что эти системы обладают одинаковыми геометрическими свойствами (полнота, минимальность, базисность Рисса, базисность Рисса со скобками и т.д.).

Утверждение 1.3. *Пусть $P(x)$ — произвольная матрица размера 2×2 с элементами $p_j \in L_1[0,\pi]$, $j = 1, 2, 3, 4$, а матрица $\mathcal{U}$ задает регулярные краевые условия. Тогда оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ подобен оператору $\mathcal{L}_{\widetilde{P},\widetilde{U}} + \gamma I$, где*

$$\widetilde{P}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{p}_2(x) \\ \widetilde{p}_3(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{p}_2(x) = p_2(x)e^{i(\varphi(x)-\psi(x))}, \qquad \widetilde{p}_3(x) = p_3(x)e^{i(\psi(x)-\varphi(x))}, \tag{1.6}$$

$$\varphi(x) = \gamma x - \int_0^x p_1(t)dt, \qquad \psi(x) = \int_0^x p_4(t)dt - \gamma x, \qquad \gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (p_1(t)+p_4(t))dt,$$

$$\widetilde{\mathcal{U}} = (\widetilde{C},\, \widetilde{D}), \quad \widetilde{C} = C, \quad \widetilde{D} = \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\pi (p_1(t)-p_4(t))dt\right) D.$$

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{H}$ оператор умножения на матрицу $W(x)$

$$W : \mathbf{y} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\varphi(x)} & 0 \\ 0 & e^{i\psi(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что этот оператор ограничен, поскольку функции φ и ψ абсолютно непрерывны, и ограниченно обратим. Тогда

$$W^{-1}\ell_P(W\mathbf{f}) = W^{-1}BW\mathbf{f}' + \left(W^{-1}PW + W^{-1}BW'\right)\mathbf{f} =$$
$$= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\mathbf{f}' + \begin{pmatrix} p_1 & p_2e^{i(\psi-\varphi)} \\ p_3e^{i(\varphi-\psi)} & p_4 \end{pmatrix}\mathbf{f} + \begin{pmatrix} \varphi' & 0 \\ 0 & -\psi' \end{pmatrix}\mathbf{f} = \ell_{\widetilde{P}}(\mathbf{f}) + \gamma\mathbf{f}.$$

Остается найти область определения оператора $W^{-1}\mathcal{L}_{P,U}W$. Заметим, что если $\mathbf{y} \in AC[0,\pi]$, то и $W^{-1}\mathbf{y} \in AC[0,\pi]$; если $\ell_P(\mathbf{y}) \in \mathbb{H}$, то и $\ell_{\widetilde{P}}(W^{-1}\mathbf{y}) = W^{-1}\ell_P(\mathbf{y}) \in \mathbb{H}$, так что для максимального оператора $W^{-1}\mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,M}) = \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{\widetilde{P},M})$. Легко видеть, что

$$W(0) = I, \quad \text{а} \quad W(\pi) = \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\pi (p_4(t)-p_1(t))dt\right) I.$$

Если $\mathbf{z} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{\widetilde{P},\widetilde{U}})$, то $\mathbf{z} = W^{-1}\mathbf{y}$, где $\mathbf{y} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,U})$. Тогда краевые условия принимают вид

$$C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = 0 \iff CW(0)\mathbf{z}(0) + DW(\pi)\mathbf{z}(\pi) = 0 \iff$$
$$\iff C\mathbf{z}(0) + \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\pi (p_1(t)-p_4(t))dt\right) D\mathbf{z}(\pi) = 0,$$

т.е.

$$\widetilde{\mathcal{U}} = (\widetilde{C},\, \widetilde{D}), \quad \text{где} \ \ \widetilde{C} = C, \ \text{а} \ \widetilde{D} = \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\pi (p_1(t)-p_4(t))dt\right) D.$$

□

Всюду далее в работе мы будем считать, что преобразования уже проведены (при этом спектральный параметр λ мы заменяем на $\lambda + \gamma$). Таким образом, мы будем

рассматривать оператор, порожденный дифференциальным выражением (1.1), где матрица $P(x)$ имеет вид

$$P(x) = \begin{pmatrix} 0 & p_2(x) \\ p_3(x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad p_2(x),\ p_3(x) \in L_1[0,\pi], \tag{1.7}$$

и регулярными краевыми условиями (1.5).

Определение 1.2. Оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ называется *сильно регулярным*, если он регулярен и к тому же $(J_{12}+J_{34})^2 + 4J_{14}J_{23} \neq 0$.

Мы будем сравнивать асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ и оператора $\mathcal{L}_{0,U}$. Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_{0,U}$, порожденный дифференциальным выражением $\ell_0(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}'$ и регулярным краевым условием $U(\mathbf{y}) = 0$ вида (1.5).

Утверждение 1.4. *Спектр оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ состоит из собственных значений, которые можно записать двумя сериями $-\frac{i}{\pi}\ln z_0 + 2n$ и $-\frac{i}{\pi}\ln z_1 + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, где z_0 и z_1 — корни квадратного уравнения*

$$J_{23}z^2 - [J_{12}+J_{34}]z - J_{14} = 0, \tag{1.8}$$

а значения ветви логарифма фиксируются в полосе $\mathrm{Im}\ z \in (-\pi, \pi]$.

В дальнейшем мы будем нумеровать эти собственные значения одним индексом $n \in \mathbb{Z}$, объединяя две серии в одну:

$$\lambda_n^0 = \begin{cases} \varkappa_0 + n, & \text{для четных } n, \\ \varkappa_1 + n, & \text{для нечетных } n, \end{cases} \qquad \text{где} \quad \varkappa_0 = -\frac{i}{\pi}\ln z_0, \quad \varkappa_1 = -\frac{i}{\pi}\ln z_1 - 1, \tag{1.9}$$

причем $-1 < \mathrm{Re}\,\varkappa_0 \leqslant \mathrm{Re}\,\varkappa_1 + 1 \leqslant 1$. В случае $\mathrm{Re}\,\varkappa_0 = \mathrm{Re}\,\varkappa_1 + 1$ для определенности будем считать, что $\mathrm{Im}\,\varkappa_0 \leqslant \mathrm{Im}\,\varkappa_1$.

Доказательство этого утверждения, так же как и другие сведения об операторе $\mathcal{L}_{0,U}$, можно найти в работе П. Джакова и Б. Митягина [26]. Мы, однако, приведем их здесь для удобства читателя.

Доказательство. Решениями уравнения $\ell_0(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y}$ с начальными условиями $(1,\,0)^t$ и $(0,\,1)^t$ являются функции $\mathbf{e}_1^0(x,\lambda) = (e^{i\lambda x},\,0)^t$ и $\mathbf{e}_2^0(x,\lambda) = (0,\,e^{-i\lambda x})^t$ соответственно, а общее решение имеет вид $\mathbf{y} = \omega_1^0\mathbf{e}_1^0 + \omega_2^0\mathbf{e}_2^0$. Подставляя это выражение в краевые условия получаем систему

$$\begin{cases} [u_{11} + u_{13}e^{i\pi\lambda}]\omega_1^0 + [u_{12} + u_{14}e^{-i\pi\lambda}]\omega_2^0 = 0, \\ [u_{21} + u_{23}e^{i\pi\lambda}]\omega_1^0 + [u_{22} + u_{24}e^{-i\pi\lambda}]\omega_2^0 = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Обозначим матрицу этой системы через $M_0(\lambda)$. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ является собственным значением оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ тогда и только тогда, когда определитель $\Delta_0(\lambda) := \det M_0(\lambda)$ обращается в ноль. Непосредственными вычислениями получаем

$$\Delta_0(\lambda) = [J_{12}+J_{34}] - J_{23}e^{i\pi\lambda} + J_{14}e^{-i\pi\lambda}. \tag{1.11}$$

Остается сделать в этом уравнении подстановку $e^{i\pi\lambda} = z$. □

Утверждение 1.5. *Нормированные собственные функции* $\mathbf{y}_n^0$, $n \in \mathbb{Z}$, *сильно регулярного оператора* $\mathcal{L}_{0,U}$ *имеют вид*

$$\mathbf{y}_n^0 = \omega_{1,j}^0 \big(e^{i\lambda_n^0 x},\, 0\big)^t + \omega_{2,j}^0 \big(0,\, e^{-i\lambda_n^0 x}\big)^t, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{где} \tag{1.12}$$

$j = 0$ *при четном* n *и* $j = 1$ *при нечетном* n. *Числа* $\omega_{i,j}^0$, *где* $i = 1, 2$, *а* $j = 0, 1$, *определяются матрицей* $\mathcal{U}$.

Доказательство. Собственные функции, введенные в доказательстве предыдущего утверждения, имеют вид $\omega_{1,n}^0 \mathbf{e}_1^0(x, \lambda_n^0) + \omega_{2,n}^0 \mathbf{e}_2^0(x, \lambda_n^0)$. При этом числа $\omega_{1,n}^0$ и $\omega_{2,n}^0$ есть решения системы (1.10), в которой $\lambda = \lambda_n^0$. Поскольку матрица этой системы 2–периодична по параметру λ, а $\lambda_{n+2}^0 - \lambda_n^0 = 2$, то числа $\omega_{1,n}^0$ и $\omega_{2,n}^0$ зависят лишь от четности индекса n. Обозначим их $\omega_{1,j}^0$ и $\omega_{2,j}^0$, где $j = 0$ при четном n и $j = 1$ при нечетном n. Остается нормировать собственные функции. Так как $\mathbf{e}_1^0(x, \lambda_n^0) = (e^{i\lambda_n^0 x}, 0)^t$ и $\mathbf{e}_2^0(x, \lambda_n^0) = (0, e^{-i\lambda_n^0 x})^t$, то

$$\big\|\omega_{1,j}^0 \mathbf{e}_1^0(x, \lambda_n^0) + \omega_{2,j}^0 \mathbf{e}_2^0(x, \lambda_n^0)\big\|_{\mathbb{H}}^2 = |\omega_{1,j}^0|^2 \int_0^\pi |e^{i\lambda_n^0 x}|^2\, dx + |\omega_{2,j}^0|^2 \int_0^\pi |e^{-i\lambda_n^0 x}|^2\, dx =$$
$$= |\omega_{1,j}^0|^2 \int_0^\pi |e^{i\varkappa_j^0 x}|^2\, dx + |\omega_{2,j}^0|^2 \int_0^\pi |e^{-i\varkappa_j^0 x}|^2\, dx.$$

Последнее выражение зависит только от четности n, а значит, после нормировки получим (1.12) с некоторыми новыми $\omega_{i,j}^0$, $i = 1, 2$, которые по–прежнему зависят только от четности n. □

Замечание 1.1. Если оператор $\mathcal{L}_{0,U}$ сильно регулярен, то дискриминант квадратного уравнения (1.8) отличен от нуля и корни z_0, z_1 различны. Корневые подпространства регулярного, но не сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, отвечающие каждому собственному значению, двумерны. При этом возможны два случая — либо в каждом подпространстве есть базис из двух собственных функций оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, либо каждое подпространство содержит ровно один (с точностью до множителя) собственный вектор.

2. Асимптотические формулы.

Обозначим через

$$E(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e_{11}(x, \lambda) & e_{12}(x, \lambda) \\ e_{21}(x, \lambda) & e_{22}(x, \lambda) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e_{11}(x, \lambda) \\ e_{21}(x, \lambda) \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e_{12}(x, \lambda) \\ e_{22}(x, \lambda) \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

матрицу фундаментальной системы решений уравнения $\ell_P(\mathbf{y}) = \lambda \mathbf{y}$ с начальными условиями $E(0, \lambda) = I$. Для исследования регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ мы воспользуемся результатами об асимптотическом поведении фундаментальной системы решений (2.1) в комплексной λ–плоскости внутри полос $\Pi_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} \lambda| < \alpha\}$, полученными авторами в [15]. В этой работе рассматривался оператор $\mathcal{L}_{Q,U}$, записанный в форме (1.2), а оценки остаточных членов в асимптотических формулах были получены для потенциала Q из пространств L_p, $p \in [1, \infty]$. Здесь нам потребуются только результаты для случая $p = 1$, причем мы переформулируем их для системы Дирака, записанной в форме (1.1) с матрицей (1.7).

Положим

$$
\begin{aligned}
&e_{11}(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \rho_{11}(x,\lambda), && e_{21}(x,\lambda) = \rho_{21}(x,\lambda),\\
&e_{12}(x,\lambda) = \rho_{12}(x,\lambda), && e_{22}(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + \rho_{22}(x,\lambda).
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Заметим сразу, что $\rho_{j,k}(0,\lambda) = 0$, $j,\ k \in \{1,2\}$.

Теорема ii. Пусть $P(x)$ имеет вид (1.7), а $\alpha > 0$ — произвольное фиксированное число. Тогда

$$
\rho_{j,k}(x,\lambda) \to 0\ j,\ k \in \{1,\ 2\}, \quad \text{при } \Pi_\alpha \ni \lambda \to \infty \tag{2.3}
$$

равномерно по $x \in [0,\pi]$. Более того, найдется такое число $\beta = \beta(P,\alpha) > 0$, что для всех $\lambda \in \Pi_{\alpha,\beta} := \{\lambda \in \Pi_\alpha : |\operatorname{Re}\lambda| > \beta\}$

$$
\rho_{1k}(x,\lambda) = \eta_{1k}(x,\lambda)e^{i\lambda x}, \qquad \rho_{2k}(x,\lambda) = \eta_{2k}(x,\lambda)e^{-i\lambda x}, \quad k = 1,\ 2, \tag{2.4}
$$

причем почти всюду на $[0,\pi]$ выполнены оценки

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\lambda\in\Pi_{\alpha,\beta}} \left|(\eta_{11}(x,\lambda))'_x\right| \leqslant M|p_2(x)|, && \sup_{\lambda\in\Pi_{\alpha,\beta}} \left|(\eta_{12}(x,\lambda))'_x\right| \leqslant M|p_2(x)|,\\
&\sup_{\lambda\in\Pi_{\alpha,\beta}} \left|(\eta_{21}(x,\lambda))'_x\right| \leqslant M|p_3(x)|, && \sup_{\lambda\in\Pi_{\alpha,\beta}} \left|(\eta_{22}(x,\lambda))'_x\right| \leqslant M|p_3(x)|
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

для некоторого $M = M(P,\alpha)$.

Асимптотическое поведение функций $\mathbf{e}_j(x,\lambda)$ вне полос Π_α в работе [15] не изучалось. Применяя метод, аналогичный методу, использованному в этой работе, несложно получить асимптотические представления для $\mathbf{e}_j(x,\lambda)$, $j = 1,\ 2$, в секторах

$$
S_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varepsilon < \arg\lambda < \pi - \varepsilon\} \quad \text{и} \quad S_2 = \{\lambda \in \mathbb{C} : -\pi + \varepsilon < \arg\lambda < -\varepsilon\},
$$

где $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ произвольно. Более того, можно получить квалифицированную оценку остаточных членов в этих представлениях в зависимости от индекса p пространства $L_p[0,\pi] \ni p_j$, $j = 2,\ 3$. Здесь, однако, нас интересует только случай $p = 1$, и потому мы воспользуемся результатом работы [32]. В ней изучался случай общей системы $B\mathbf{y}' + P\mathbf{y}$ в пространстве $(L_2[0,\pi])^n$. Мы сформулируем здесь теорему 2.2 этой работы для случая системы Дирака.

Теорема iii. Пусть матрица $P(x)$ имеет вид (1.7). Существует матрица $Y(x,\lambda)$ фундаментальной системы решений уравнения $\ell_P(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y}$, элементы которой $y_{jk}(x,\lambda)$ являются целыми функциями параметра λ с ограничением на рост $|y_{jk}(x,\lambda)| \leqslant Me^{x|\lambda|}$, где M не зависит от x и λ. Кроме того, $Y(x,\lambda)$ имеет асимптотическое представление

$$
Y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda x}(1+o(1)) & e^{-i\lambda x}\cdot o(1)\\ e^{i\lambda x}\cdot o(1) & e^{-i\lambda x}(1+o(1)) \end{pmatrix} \tag{2.6}
$$

при $\lambda \to \infty$ в секторах S_1 и S_2 равномерно по $x \in [0,\pi]$.

Нам необходимо выяснить асимптотическое поведение функций $\mathbf{e}_1(x,\lambda)$ и $\mathbf{e}_2(x,\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ во всей комплексной плоскости. Для этого мы воспользуемся теоремами ii и iii, а также фактом из теории целых функций, сформулированным ниже. Этот факт хорошо известен специалистам, но для полноты изложения мы приведем его с доказательством, опираясь на следующее утверждение (см. [30]).

Теорема iv. Пусть $D \in \mathbb{C}$ — ограниченная область, а функция $f(z)$ голоморфна в D и непрерывна в $\overline{D}$. Пусть далее $\zeta \in D$, $U_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z-\zeta| \leqslant \rho\}$, причем на окружности $|z-\zeta| = \rho$ имеется дуга, не принадлежащая D, длина которой $l \geqslant 2\pi\rho/n$ для некоторого натурального n. Пусть $|f(z)| \leqslant M_0$ для всех $z \in \partial D \cap \overline{U_\rho}$ и $|f(z)| \leqslant M$ для всех остальных точек $z \in \partial D$. Тогда $|f(\zeta)| \leqslant M_0^{1/n} M^{1-1/n}$.

Лемма 2.1. *Пусть f — целая функция, а $S = \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in (0, \pi/2)\}$. Обозначим*

$$M_0(r) = \sup\{|f(z)| : \arg z = 0,\ |z| \geqslant r\},$$
$$M_1(r) = \sup\{|f(z)| : \arg z \in [0, \pi/6],\ |z| \geqslant r\},$$
$$M = \sup\{|f(z)| : z \in \overline{S}\}.$$

Тогда $M_1(r) \leqslant M_0(r/4)^{1/4} \cdot M^{3/4}$.

Доказательство. Возьмем точку $\zeta = re^{i\alpha}$, где $\alpha \in [0, \pi/6]$. Случай $\alpha = 0$ тривиален, поскольку $M_0(r) \leqslant M_1(r)$, так что далее считаем $\alpha > 0$. Рассмотрим окружность радиуса $\rho = r\sqrt{2}\sin\alpha$ с центром в точке ζ. Легко видеть, что эта окружность лежит в правой полуплоскости, пересекает вещественную ось в точках $x_\pm = r(\cos\alpha \pm \sin\alpha)$, причем отрезок $[x_-, x_+]$ виден из точки ζ под прямым углом. Применим теорему iv к функции $f(z)$ и области $D = \{z : |z-\zeta| < \rho\} \cap S$. Тогда

$$|f(\zeta)| \leqslant \left(\max_{z \in [x_-, x_+]} |f(z)| \right)^{1/4} \cdot M^{3/4}.$$

Учитывая, что $\alpha \leqslant \pi/6$, получаем, что $x_- > r/4$, откуда следует утверждение леммы. $\square$

Теорема 2.1. *Функции $e_{ij}(x, \lambda)$ аналитичны по λ во всей комплексной плоскости и*

$$E(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda x} \cdot (1 + o(1)) + e^{-i\lambda x} \cdot o(1) & e^{i\lambda x} \cdot o(1) + e^{-i\lambda x} \cdot o(1) \\ e^{i\lambda x} \cdot o(1) + e^{-i\lambda x} \cdot o(1) & e^{i\lambda x} \cdot o(1) + e^{-i\lambda x} \cdot (1 + o(1)) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

при $\mathbb{C} \ni \lambda \to \infty$ равномерно по $x \in [0, \pi]$.

Доказательство. Из теоремы iii следует, что функции $e_{jk}(x, \lambda)$ являются целыми функциями с ограничением на рост $|e_{jk}(x, \lambda)| \leqslant M e^{x|\lambda|}$. Матрица $E(x, \lambda)$, определенная в (2.1), имеет вид

$$E(x,\lambda) = Y^{-1}(0,\lambda) Y(x,\lambda).$$

Тогда из (2.6) следует (2.7) при $S_j \ni \lambda \to \infty$ равномерно по $x \in [0, \pi]$. В то же время, представление (2.3) влечет (2.7) на лучах $\arg\lambda = 0$ и $\arg\lambda = \pi$. Для завершения доказательства теоремы нам достаточно показать, что представление (2.7) справедливо также в секторах

$$S_3 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda \in [0, \pi/6]\}, \quad S_4 = \{\arg\lambda \in [5\pi/6, \pi]\},$$
$$S_5 = \{\arg\lambda \in [-\pi, -5\pi/6]\}, \quad \text{и} \quad S_6 = \{\arg\lambda \in [-\pi/6, 0]\}.$$

Рассмотрим сектор S_3 (остальные три случая разбираются аналогично). Пусть $\rho_{jk}(x, \lambda)$, j, $k = 1, 2,$ — функции, введенные в (2.3). Зафиксируем произвольную пару индексов j, k и точку $x \in [0, \pi]$ и обозначим $f(z) = \rho_{jk}(x, z)e^{ixz}$. Тогда $f(z)$ является целой функцией, причем $|f(z)| \leqslant M$ в секторе S_3, а на положительном луче вещественной оси $f(z) = o(1)$ при $z \to \infty$ равномерно по $x \in [0, \pi]$. Согласно лемме 2.1, $f(z) = o(1)$ в секторе S_3 при $|z| \to \infty$ равномерно по $x \in [0, \pi]$. $\square$

Теорема ii и теорема 2.1 позволяют получить асимптотические формулы для характеристического определителя оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом вида (1.7) и регулярными краевыми условиями.

Определение 2.1. Пусть потенциал $P \in L_1$, краевые условия заданы матрицей $\mathcal{U}$, а функции $\mathbf{e}_1(x, \lambda)$ и $\mathbf{e}_2(x, \lambda)$ определены в (2.1). *Характеристическим определителем* $\Delta(\lambda)$ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ называется детерминант матрицы

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} u_{11} + u_{13}e_{11}(\pi, \lambda) + u_{14}e_{21}(\pi, \lambda) & u_{12} + u_{13}e_{12}(\pi, \lambda) + u_{14}e_{22}(\pi, \lambda) \\ u_{21} + u_{23}e_{11}(\pi, \lambda) + u_{24}e_{21}(\pi, \lambda) & u_{22} + u_{23}e_{12}(\pi, \lambda) + u_{24}e_{22}(\pi, \lambda) \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Утверждение 2.1. *Пусть потенциал P имеет вид* (1.7)*, а краевые условия U регулярны. Пусть $\Delta(\lambda)$ — характеристический определитель оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, а $\Delta_0(\lambda)$ — характеристический определитель оператора $\mathcal{L}_{0,U}$. Тогда при $\lambda \to \infty$ в произвольной полосе Π_α справедливо асимптотическое представление*

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + o(1).$$

Кроме того, найдется такая полоса Π_{α_0}, что при $\lambda \to \infty$ вне этой полосы, справедливо асимптотическое представление

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda)(1 + o(1)).$$

Доказательство. Определитель матрицы $M(\lambda)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = J_{12} + J_{13}e_{12}(\pi, \lambda) + J_{14}e_{22}(\pi, \lambda) + J_{32}e_{11}(\pi, \lambda) + J_{42}e_{21}(\pi, \lambda) + \\ + J_{34}(e_{11}(\pi, \lambda)e_{22}(\pi, \lambda) - e_{12}(\pi, \lambda)e_{21}(\pi, \lambda)) \end{aligned} \tag{2.9}$$

(напомним, что через $J_{\alpha\beta}$ мы обозначаем определитель, составленный из α-го и β-го столбца матрицы $\mathcal{U}$). Заметим, что выражение $e_{11}(x, \lambda)e_{22}(x, \lambda) - e_{12}(x, \lambda)e_{21}(x, \lambda)$ является определителем матрицы фундаментальной системы решений в точке $x \in [0, \pi]$. Поскольку след матрицы $B^{-1}(\lambda I - P(x))$ равен нулю, то, согласно теореме Лиувилля (см., например, [8, Гл. III §1]), это выражение не зависит от x, а при $x = 0$ оно равно единице по определению функций $\mathbf{e}_1(x, \lambda)$ и $\mathbf{e}_2(x, \lambda)$. Подставляя асимптотические формулы (2.7) в соотношение (2.9), получим

$$\Delta(\lambda) = J_{12} + J_{34} + J_{14}e^{-i\pi\lambda} + J_{32}e^{i\pi\lambda} + o(1) \left(|e^{i\pi\lambda}| + |e^{-i\pi\lambda}|\right) = \Delta_0(\lambda) + o(1) \left(|e^{i\pi\lambda}| + |e^{-i\pi\lambda}|\right).$$

Остаточный член в этом равенстве есть $o(1)$ при $\Pi_\alpha \ni \lambda \to \infty$ для любого $\alpha > 0$ и первое утверждение теоремы доказано. Докажем второе утверждение. Разберем случай $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Подберем $\alpha_0 > 0$ так, что

$$|J_{12}| + |J_{34}| + |J_{32}|e^{-\pi\alpha_0} \leqslant |J_{14}|\frac{e^{\pi\alpha_0}}{2}.$$

Тогда при $\operatorname{Im} \lambda > \alpha_0$

$$|\Delta_0(\lambda)| \geqslant |J_{14}e^{-i\pi\lambda}| - |J_{12} + J_{34} + J_{32}e^{i\pi\lambda}| \geqslant \frac{1}{2}|J_{14}e^{-i\pi\lambda}|, \tag{2.10}$$

а значит

$$|\Delta_0(\lambda)|^{-1} \left(|e^{i\pi\lambda}| + |e^{-i\pi\lambda}|\right) \leqslant 2|J_{14}|^{-1} \left(1 + \left|e^{-2\pi\alpha_0}\right|\right) \leqslant 4|J_{14}|^{-1}.$$

Итак,

$$\text{при } \operatorname{Im} \lambda > \alpha_0 : \quad \Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda)(1 + o(1)).$$

Случай $\operatorname{Im} \lambda < 0$ разбирается аналогично. □

Теперь мы покажем, что собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ асимптотически сближаются с собственными значениями невозмущенного оператора.

Теорема 2.2. *Пусть потенциал P имеет вид* (1.7) *и $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака. Обозначим через $\{\lambda_n^0\}$ собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ и через λ_n собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с учетом алгебраической кратности. Тогда при подходящей нумерации последовательности $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (и такая нумерация возможна)*

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + o(1) \quad \text{при} \quad |n| \to \infty.$$

В частности, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \Pi_{\alpha_0}$ для некоторого $\alpha_0 > 0$.

Доказательство. Обозначим $f(\lambda) := \Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)$. В силу утверждения 2.1, найдется α_0 такое, что

$$\frac{|f(\lambda)|}{|\Delta_0(\lambda)|} \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty,\ \lambda \notin \Pi_{\alpha_0}.$$

Выберем число $\alpha > \alpha_0$ так, чтобы на прямых $|\operatorname{Im}\lambda| = \alpha$ было выполнено неравенство $|f(\lambda)| < |\Delta_0(\lambda)|$. Далее, зафиксируем произвольное число $\mu \in (0, 2)$, для которого на прямой $\operatorname{Re}\lambda = \mu$ нет нулей функции $\Delta_0(\lambda)$ и обозначим

$$m = \min\{|\Delta_0(\lambda)| : \operatorname{Re}\lambda = \mu\}.$$

Вновь обращаясь к утверждению 2.1, видим, что $|f(\lambda)| \to 0$ при $\lambda \to \infty$ внутри полосы Π_α. Тогда найдется такое натуральное N_1, что при всех $\lambda \in \overline{\Pi}_\alpha$, $|\operatorname{Re}\lambda| \geqslant \mu + 2N_1$, выполнено $|f(\lambda)| < m$. Заметим, что функция $\Delta_0(\lambda)$ периодична с периодом 2, а значит на вертикальных отрезках $\operatorname{Re}\lambda = \mu \pm 2n$, $n > N_1$, внутри полосы Π_α выполнено $\min|\Delta_0(\lambda)| = m > |f(\lambda)|$. Применим теорему Руше к прямоугольнику, ограниченному прямыми $\operatorname{Im}\lambda = \pm\alpha$, $\operatorname{Re}\lambda = \mu \pm 2n$, где $n > N_1$ и получим, что функции $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_0(\lambda)$ имеют одинаковое (с учетом кратности) число нулей в любом таком прямоугольнике.

Перейдем к изучению нулей функции $\Delta(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ внутри полосы Π_α. Зафиксируем число r так, чтобы круги $U_r(\lambda_n^0) = \{\lambda : |\lambda - \lambda_n^0| \leqslant r\}$, $n \in \mathbb{Z}$, не пересекались и лежали в полосе Π_α. Обозначим

$$m_n = \min\{|\Delta_0(\lambda)| : |\lambda - \lambda_n^0| = r\}.$$

Поскольку функция $\Delta_0(\lambda)$ периодична, то $m_n \geqslant M$ для некоторого $M > 0$. Тогда существует такое натуральное N_2, что при $|\operatorname{Re}\lambda| > \mu + 2N_2$ на окружностях $|\lambda - \lambda_n^0| = r$ выполнено: $|f(\lambda)| < |\Delta_0(\lambda)|$. По теореме Руше количество нулей функций $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_0(\lambda)$ в каждом круге $U_r(\lambda_n^0)$, $|n| \geqslant 2N_2 + 2$, совпадает. Теперь мы занумеруем нули функции $\Delta(\lambda)$ в каждом таком круге так, чтобы их номера совпадали с номерами нулей функции $\Delta_0(\lambda)$ в этом же круге. Из рассуждений, приведенных выше, следует, что количество нулей функций $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_0(\lambda)$, не попавших в объединение этих кругов, конечно и одинаково. Проведем нумерацию оставшихся нулей функции $\Delta(\lambda)$ в произвольном порядке. Нули функции $\Delta(\lambda)$ — собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ — мы обозначим $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Остается заметить, что число r мы можем уменьшать и выбирать сколь угодно малым. Для любого такого r найдется номер $N(r)$, что при всех $|n| > N(r)$ выполнено $|\lambda_n - \lambda_n^0| < r$. Иными словами, $\lambda_n = \lambda_n^0 + o(1)$. □

Теперь докажем теорему об асимптотике собственных функций сильно регулярного оператора. В случае регулярного, но не сильно регулярного оператора, собственные значения асимптотически двукратны. В этом случае мы изучим асимптотическое поведение соответствующих двумерных спектральных проекторов (см. теорему 3.2 ниже).

Теорема 2.3. *Пусть потенциал $P(x)$ имеет вид (1.7), а оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ сильно регулярен. Обозначим через $\{\mathbf{y}_n(x)\}$ нормированные собственные функции этого оператора, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_n\}$, а через $\{\mathbf{y}_n^0(x)\}$ — нормированные собственные функции оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_n^0\}$. Тогда*

$$\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{y}_n^0(x) + \mathbf{r}_n(x), \qquad \text{где } \|\mathbf{r}_n\|_C \to 0. \tag{2.11}$$

Более того, справедливо представление

$$y_{1,n}(x) = e^{i\lambda_n x}\tau_{1,n}(x), \qquad y_{2,n}(x) = e^{-i\lambda_n x}\tau_{2,n}(x), \tag{2.12}$$

причем $|\tau_{j,n}(0)| \leqslant C$, $j=1,2$, а производные функций $\tau_{j,n}(x)$ подчинены оценке

$$|\tau'_{j,n}(x)| \leqslant C(|p_2(x)| + |p_3(x)|), \tag{2.13}$$

почти всюду на $[0,\pi] \ni x$, где постоянная C не зависит ни от n, ни от x.

Доказательство. Поскольку оператор $\mathcal{L}_{0,U}$ сильно регулярен, то все его собственные значения просты. Обозначим $\delta = \min_{n\neq m} |\lambda_n^0 - \lambda_m^0|/2$. Тогда, в силу теоремы 2.2, существует номер N, такой, что для всех $|n| > N$ в $\delta-$окрестности точки λ_n^0 лежит ровно одно собственное значение λ_n оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Из определения собственных значений следует, что $\Delta_0(\lambda_n^0) = 0$, где $\Delta_0(\lambda) = \det M_0(\lambda)$,

$$M_0(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}^0(\lambda) & M_{12}^0(\lambda) \\ M_{21}^0(\lambda) & M_{22}^0(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11}^0(\pi,\lambda) & e_{12}^0(\pi,\lambda) \\ e_{21}^0(\pi,\lambda) & e_{22}^0(\pi,\lambda) \end{pmatrix},$$

Обозначим $\omega_n^0 = (M_{12}^0(\lambda_n^0),\, -M_{11}^0(\lambda_n^0))^t$ — тогда функция

$$\widetilde{\mathbf{y}}_n^0(x) = \omega_{1,n}^0 \mathbf{e}_1^0(x,\lambda_n^0) + \omega_{2,n}^0 \mathbf{e}_2^0(x,\lambda_n^0)$$

является собственной (ненормированной) функцией для оператора $\mathcal{L}_{0,U}$. Для $|n| > N$ аналогично определим вектор $\omega_n = (M_{12}(\lambda_n),\, -M_{11}(\lambda_n))^t$, так что функция

$$\widetilde{\mathbf{y}}_n(x) = \omega_{1,n}\mathbf{e}_1(x,\lambda_n) + \omega_{2,n}\mathbf{e}_2(x,\lambda_n)$$

является собственной для оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Из (2.3) следует, что

$$\|\mathbf{e}_1(x,\lambda_n) - \mathbf{e}_1^0(x,\lambda_n)\|_C + \|\mathbf{e}_2(x,\lambda_n) - \mathbf{e}_2^0(x,\lambda_n)\|_C \to 0 \qquad \text{при } n \to \infty,$$

а из теоремы 2.2 и явного вида функций $\mathbf{e}_1^0(x,\lambda)$ и $\mathbf{e}_2^0(x,\lambda)$

$$\|\mathbf{e}_1^0(x,\lambda_n) - \mathbf{e}_1^0(x,\lambda_n^0)\|_C + \|\mathbf{e}_2^0(x,\lambda_n) - \mathbf{e}_2^0(x,\lambda_n^0)\|_C \to 0.$$

Тогда $\|\omega_n - \omega_n^0\| \longrightarrow 0$, а значит

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{y}}_n(x) &= \omega_{1,n}^0\mathbf{e}_1(x,\lambda_n) + \omega_{2,n}^0\mathbf{e}_2(x,\lambda_n) + (\omega_{1,n} - \omega_{1,n}^0)\mathbf{e}_1(x,\lambda_n) + (w_{2,n} - \omega_{2,n}^0)\mathbf{e}_2(x,\lambda_n) = \\ &= \omega_{1,n}^0\mathbf{e}_1^0(x,\lambda_n) + \omega_{2,n}^0\mathbf{e}_2^0(x,\lambda_n) + \mathbf{r}_n(x), \qquad \text{где} \quad \|\mathbf{r}_n(x)\|_C \to 0.\end{aligned}$$

Остается нормировать функции $\widetilde{\mathbf{y}}_n$ и $\widetilde{\mathbf{y}}_n^0$. Заметим, что $\big|\|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|_{\mathbb{H}} - \|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_{\mathbb{H}}\big| \leqslant C\|\mathbf{r}_n\|_C = o(1)$. Далее, функции $\widetilde{\mathbf{y}}_n^0$ зависят только от четности номера n, а значит последовательность норм $\{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ (и в пространстве C,

и в пространстве $\mathbb{H}$) отделена от нуля и от бесконечности. Тогда тем же свойством обладает и последовательность $\{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|\}_{\mathbb{N}}$, откуда

$$\left\| \frac{\widetilde{\mathbf{y}}_n(x)}{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|_{\mathbb{H}}} - \frac{\widetilde{\mathbf{y}}_n^0(x)}{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_{\mathbb{H}}} \right\|_C \leqslant \frac{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_{\mathbb{H}} \cdot \|\widetilde{\mathbf{y}}_n - \widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_C + \|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_C \cdot \left| \|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_{\mathbb{H}} - \|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|_{\mathbb{H}} \right|}{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|_{\mathbb{H}} \cdot \|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_{\mathbb{H}}} = o(1)$$

и представление (2.11) доказано. Для доказательства представления (2.12) воспользуемся соотношениями (2.2) и (2.3). Получим

$$\begin{cases} \widetilde{y}_{1,n}(x) = e^{i\lambda_n x} \left(\omega_{1,n} + \omega_{1,n}\eta_{11}(x,\lambda_n) + \omega_{2,n}\eta_{12}(x,\lambda_n) \right), \\ \widetilde{y}_{2,n}(x) = e^{-i\lambda_n x} \left(\omega_{2,n} + \omega_{1,n}\eta_{21}(x,\lambda_n) + \omega_{2,n}\eta_{22}(x,\lambda_n) \right), \end{cases} \qquad |n| > N.$$

Введем обозначения

$$\widetilde{\tau}_{1,n}(x) = \widetilde{y}_{1,n}(x)e^{-i\lambda_n x} \quad \text{и} \quad \widetilde{\tau}_{2,n}(x) = \widetilde{y}_{2,n}(x)e^{i\lambda_n x}.$$

Тогда $\widetilde{\tau}_{j,n}(0) = \omega_{j,n} = \omega_{j,n}^0 + o(1)$ при $|n| \to \infty$, $j = 1, 2$. Поскольку числа $\omega_{1,n}^0$ и $\omega_{2,n}^0$ зависят только от четности номера n, то последовательности $\{\widetilde{\tau}_{1,n}(0)\}_{|n|>N}$ и $\{\widetilde{\tau}_{2,n}(0)\}_{|n|>N}$ ограничены. Остается оценить производные:

$$\widetilde{\tau}'_{j,n}(x) = \omega_{1,n}\eta'_{j1}(x,\lambda_n) + \omega_{2,n}\eta'_{j2}(x,\lambda_n),$$

а значит, согласно (2.4),

$$|\widetilde{\tau}'_{1,n}(x)| \leqslant M|p_2(x)|(|\omega_{1,n}| + |\omega_{2,n}|), \qquad |\widetilde{\tau}'_{2,n}(x)| \leqslant M|p_3(x)|(|\omega_{1,n}| + |\omega_{2,n}|).$$

Отсюда сразу следует оценка (2.13) для ненормированных функций $\widetilde{\mathbf{y}}_n$. Так как нормы $\{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|_{\mathbb{H}}\}_{|n|>N}$ отделены от нуля, то эта оценка сохранится и после нормировки. □

3. Функция Грина.

Мы покажем, что резольвента оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ компактна и изучим асимптотическое поведение производящей функции $G(t,x,\lambda)$ этого компактного оператора (функции Грина) при $\lambda \to \infty$.

Утверждение 3.1. *Пусть потенциал P имеет вид (1.7). Резольвента $\mathfrak{R}(\lambda) = (\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-1}$ регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ определена при всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, где λ_n — собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, и является интегральным оператором в $\mathbb{H}$*

$$\mathfrak{R}(\lambda)\mathbf{f} = \int_0^\pi G(t,x,\lambda)\mathbf{f}(t)dt. \tag{3.1}$$

Функция $G(t,x,\lambda)$ непрерывна на квадрате $(t,x) \in [0,\pi]^2$ за исключением диагонали $x = t$.

Доказательство. Матрица $E(x,\lambda)$, определенная в (2.1), удовлетворяет уравнению

$$BE'(x,\lambda) + P(x)E(x,\lambda) = \lambda E(x,\lambda),$$

причем $E(0,\lambda) = I$. Применим метод вариации постоянных к уравнению $\ell_P(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y} + \mathbf{f}$. Тогда решение этого уравнения примет вид

$$\mathbf{y}(x,\lambda) = \omega_1\mathbf{e}_1(x,\lambda) + \omega_2\mathbf{e}_2(x,\lambda) - \int_x^\pi E(x,\lambda)E^{-1}(t,\lambda)B^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt, \tag{3.2}$$

где ω_1 и ω_2 — произвольные числа. Легко видеть, что

$$\mathbf{y}(0,\lambda) = \omega - \int_0^\pi E^{-1}(t,\lambda)B^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt, \quad \mathbf{y}(\pi,\lambda) = E(\pi,\lambda)\omega, \quad \text{где } \omega = (\omega_1,\omega_2)^t.$$

Для определения вектора ω воспользуемся краевыми условиями $C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = 0$, введенными в (1.5). Тогда

$$\omega = \int_0^\pi M^{-1}(\lambda)CE^{-1}(t,\lambda)B^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt,$$

где $M(\lambda) = C + DE(\pi,\lambda)$. Матрица $M^{-1}(\lambda)$ определена в точности тогда, когда $\Delta(\lambda) = \det M(\lambda) \neq 0$, т.е. для всех $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Функция $\mathbf{y}(x,\lambda)$ теперь принимает вид

$$\mathbf{y}(x,\lambda) = \int_0^\pi G(t,x,\lambda)\mathbf{f}(t)\,dt,$$

где

$$G(t,x,\lambda) = \begin{cases} E(x,\lambda)M^{-1}(\lambda)CE^{-1}(t,\lambda)B^{-1}, \text{ при } t < x, \\ E(x,\lambda)(M^{-1}(\lambda)C - I)E^{-1}(t,\lambda)B^{-1}, \text{ при } t > x, \end{cases} \tag{3.3}$$

что доказывает требуемое утверждение. □

Определение 3.1. Функция $G(t,x,\lambda)$ называется *функцией Грина* оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Через $G_0(t,x,\lambda)$ будем обозначать функцию Грина невозмущенного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$.

Отметим, что из доказанного утверждения следует компактность в пространстве $\mathbb{H}$ оператора $\mathfrak{R}(\lambda)$ при любом $\lambda \notin \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (отсюда, в частности, следует замкнутость оператора $\mathcal{L}_{P,U}$).

Наша ближайшая цель — получить оценки для функции $G(t,x,\lambda)$. Эти оценки являются ключевыми для доказательства полноты системы собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Для упрощения дальнейших выкладок обозначим матрицу $E(x,\lambda)E^{-1}(a,\lambda)$ через $\mathcal{E}(a,x,\lambda)$, где $0 \leqslant a,\ x \leqslant \pi$, $\lambda \in \mathbb{C}$, и найдем ее в явном виде. Мы уже отмечали в доказательстве утверждения 2.1, что $\det E(x,\lambda) \equiv 1$. Тогда

$$E^{-1}(a,\lambda) = \begin{pmatrix} e_{22}(a,\lambda) & -e_{12}(a,\lambda) \\ -e_{21}(a,\lambda) & e_{11}(a,\lambda) \end{pmatrix},$$

откуда

$$\mathcal{E}(a,x,\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11}(a,x,\lambda) & \mathcal{E}_{12}(a,x,\lambda) \\ \mathcal{E}_{21}(a,x,\lambda) & \mathcal{E}_{22}(a,x,\lambda) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{j1}(a,x,\lambda) &= e_{j1}(x,\lambda)e_{22}(a,\lambda) - e_{j2}(x,\lambda)e_{21}(a,\lambda), \\ \mathcal{E}_{j2}(a,x,\lambda) &= e_{j2}(x,\lambda)e_{11}(a,\lambda) - e_{j1}(x,\lambda)e_{12}(a,\lambda), \quad j = 1,\ 2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

В случае $P(x) \equiv 0$ будем использовать обозначения $\mathcal{E}^0(a,x,\lambda) = (\mathcal{E}^0_{jk}(a,x,\lambda))$, $j,\ k = 1,\ 2$.

Лемма 3.1. *Матрица* $\mathcal{E}(a,x,\lambda)$ *удовлетворяет уравнению*

$$B\mathcal{E}'(x) + P(x)\mathcal{E}(x) = \lambda\mathcal{E}(x), \quad x \in [0,\pi] \tag{3.5}$$

и начальному условию $\mathcal{E}(a,a,\lambda) = I$. Функции $\mathcal{E}_{ij}(a,x,\lambda)$ аналитичны по λ во всей комплексной плоскости и при $\lambda \to \infty$ верно представление

(3.6)

$$\mathcal{E}(a,x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda\xi}\cdot(1+o(1)) + e^{-i\lambda\xi}\cdot o(1) & e^{i\lambda\xi}\cdot o(1) + e^{-i\lambda\xi}\cdot o(1) \\ e^{i\lambda\xi}\cdot o(1) + e^{-i\lambda\xi}\cdot o(1) & e^{i\lambda\xi}\cdot o(1) + e^{-i\lambda\xi}\cdot(1+o(1)) \end{pmatrix}, \ \xi = x - a,$$

при $\mathbb{C} \ni \lambda \to \infty$ равномерно по $0 \leqslant a,\ x \leqslant \pi$.

Доказательство. То, что матрица $\mathcal{E}(a,x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению (3.5) сразу следует из (3.4). Равенство $\mathcal{E}(a,a,\lambda) = I$ очевидно. Асимптотическое представление (3.6) следует из (2.7). □

Для дальнейшего нам необходимы сведения об операторе $(\mathcal{L}_{P,U})^*$.

Утверждение 3.2. *Сопряженным к регулярному оператору $\mathcal{L}_{P,U}$ является оператор, который задается сопряженным дифференциальным выражением*

$$\ell_{P^*}(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P^*(x)\mathbf{y}, \qquad \text{где } P^*(x) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{p_3}(x) \\ \overline{p_2}(x) & 0 \end{pmatrix},$$

и сопряженными краевыми условиями. Сопряженные краевые условия выписываются неоднозначно, в частности, матрицу краевых условий можно взять равной

$$\mathcal{U}^* = \begin{pmatrix} \overline{J_{23}} & \overline{J_{13}} & -\overline{J_{12}} & 0 \\ 0 & -\overline{J_{34}} & \overline{J_{24}} & \overline{J_{23}} \end{pmatrix}.$$

Для любого регулярного (сильно регулярного) оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ сопряженный оператор $(\mathcal{L}_{P,U})^* = \mathcal{L}_{P^*,U^*}$ также является регулярным (сильно регулярным). Собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$ совпадают (с учетом кратности) с числами $\overline{\lambda}_n$, где λ_n, $n \in \mathbb{Z}$, — собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$.

Для всякого $\lambda \notin \{\overline{\lambda}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ определена резольвента $\mathfrak{R}^*(\lambda) = (\mathcal{L}_{P^*,U^*} - \lambda I)^{-1}$, которая имеет вид

$$\mathfrak{R}^*(\lambda)\mathbf{f} = \int_0^\pi G^*(t,x,\lambda)\mathbf{f}(t)dt.$$

Матрица $G^*(t,x,\lambda) = (g^*_{jk}(t,x,\lambda))$ связана с функцией $G(t,x,\lambda) = (g_{jk}(t,x,\lambda))$, введенной в (3.1), соотношениями

$$g^*_{jk}(t,x,\lambda) = \overline{g_{kj}}(x,t,\overline{\lambda}), \qquad j,\, k = 1,\, 2, \quad x,\, t \in [0,\pi],\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\overline{\lambda}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Вид сопряженного дифференциального выражения следует из леммы 1.1. Вид сопряженных краевых условий и их регулярность проверяется непосредственными вычислениями с использованием тождества (1.3) и определения 1.1. Соотношения (3.7) общеизвестны. □

Для сокращения записи далее будем обозначать

$$U_\delta(\lambda_n) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_n| < \delta\}, \qquad \Omega_\delta = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} U_\delta(\lambda_n),$$

$$\Omega_{\alpha,\delta} = \Pi_\alpha \cap \Omega_\delta, \qquad \Omega_{\alpha,\delta,R} = \{z \in \Omega_{\alpha,\delta} : |\operatorname{Re} z| > R\}.$$

Лемма 3.2. *Для любого $\delta > 0$ существует такое число $M = M(P,U,\delta)$, что при всех $\lambda \in \overline{\Omega_\delta}$, характеристический определитель регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ удовлетворяет оценке $|\Delta(\lambda)| \geqslant M e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}$.*

Доказательство. Согласно теореме 2.2 и утверждению 2.1, найдется такое число $\alpha_0 > 0$, что все круги $U_\delta(\lambda_n)$ лежат в полосе Π_{α_0} и при $\lambda \to \infty$ вне Π_{α_0} справедливо равенство $\Delta(\lambda)/\Delta_0(\lambda) = 1 + o(1)$. Увеличивая, если нужно, число α_0, можно считать, что $|\Delta(\lambda)| \geqslant |\Delta_0(\lambda)|/2$ для всех $\lambda \notin \Pi_{\alpha_0}$. Тогда из неравенства (2.10) следует доказываемое неравенство при $\operatorname{Im}\lambda > \alpha_0$. Случай $\operatorname{Im}\lambda < -\alpha_0$ аналогичен. Для завершения доказательства остается показать, что для всех точек $\lambda \in \overline{\Omega_{\alpha_0,\delta}}$ справедлива оценка $|\Delta(\lambda)| \geqslant M$ при некотором $M > 0$. Согласно теореме 2.2, найдется такое число R, что для всех собственных значений λ_n, $|\lambda_n| > R$, справедливы неравенства $|\lambda_n - \lambda_n^0| < \delta/2$. В силу периодичности функции $\Delta_0(\lambda)$, существует такое $m > 0$, что $|\Delta_0(\lambda)| \geqslant m$ в Π_{α_0} вне кругов $U_{\delta/2}(\lambda_n^0)$. Поскольку $\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + o(1)$ при $\lambda \to \infty$ в полосе $\lambda \in \Pi_{\alpha_0}$ (см. утверждение 2.1), то, увеличивая, если необходимо, число R, можно считать, что при $|\operatorname{Re}\lambda| > R$ выполнена оценка $|\Delta(\lambda)| \geqslant m/2$ в Π_{α_0} вне кругов $U_{\delta/2}(\lambda_n^0)$. Так как при $|\operatorname{Re}\lambda| > R$ круг $U_{\delta/2}(\lambda_n^0)$ содержится в круге $U_\delta(\lambda_n)$, то оценка $|\Delta(\lambda)| \geqslant m/2$ выполнена при всех $\lambda \in \overline{\Omega}_{\alpha_0,\delta,R}$. Наконец, на компакте

$$\{\lambda : |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \alpha_0,\ |\operatorname{Re}\lambda| \leqslant R,\ |\lambda - \lambda_n| \geqslant \delta,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

функция $\Delta(\lambda)$ не обращается в ноль, а значит, отделена от нуля. □

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — произвольный оператор Дирака с потенциалом вида (1.7) и регулярными краевыми условиями U. Для любого $\delta > 0$ существует такое число $M = M(P,U,\delta)$, что в $\overline{\Omega_\delta}$ функция $G(t,x,\lambda) = (g_{jk}(t,x,\lambda))$ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ удовлетворяет оценке*

$$|g_{jk}(t,x,\lambda)| \leqslant M.$$

Кроме того, для любых положительных чисел α, δ и ε найдется такое $R > 0$, что при всех $\lambda \in \overline{\Omega_{\alpha,\delta,R}}$ и всех $t, x \in [0,\pi]$ выполнено

$$|g_{jk}(t,x,\lambda) - g^0_{jk}(t,x,\lambda)| < \varepsilon,$$

где $G_0(t,x,\lambda) = (g^0_{jk}(t,x,\lambda))$ — функция Грина оператора $\mathcal{L}_{0,U}$.

Доказательство. Матрицы $E(x,\lambda)$, $M(\lambda)$, C и $E^{-1}(t,\lambda)$ явно выписаны в (2.1), (2.8), (1.5) и (3.4) соответственно. Тогда из (3.3) непосредственными вычислениями получаем, что

$$G(t,x,\lambda) = i\left(\frac{J_{12}}{\Delta(\lambda)} - \chi_{t>x}(t,x)\right)\begin{pmatrix}\mathcal{E}_{11}(t,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{12}(t,x,\lambda)\\ \mathcal{E}_{21}(t,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{22}(t,x,\lambda)\end{pmatrix} + \\ + \frac{i}{\Delta(\lambda)}\begin{pmatrix}\mathcal{E}_{11}(\pi,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{12}(\pi,x,\lambda)\\ \mathcal{E}_{21}(\pi,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{22}(\pi,x,\lambda)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}J_{14} & J_{24}\\ J_{13} & J_{23}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_{22}(t,\lambda) & e_{12}(t,\lambda)\\ -e_{21}(t,\lambda) & -e_{11}(t,\lambda)\end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

где $\chi_{t>x}$ — характеристическая функция треугольника $t > x$, а $\Delta(\lambda)$ — определитель, введенный в определении 2.1. Пусть $\alpha_0 > 0$ таково, что полоса Π_{α_0} содержит все круги $U_\delta(\lambda_n)$. Пусть вначале $|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant \alpha_0$. Проведем оценку функции $G(t,x,\lambda)$ на треугольнике $0 \leqslant t < x \leqslant \pi$. В силу представлений (3.6), функции $\mathcal{E}_{jk}(t,x,\lambda)$ удовлетворяют оценкам

$$|\mathcal{E}_{jk}(t,x,\lambda)| \leqslant Me^{|\operatorname{Im}\lambda|(x-t)}.$$

Аналогично,

$$|\mathcal{E}_{jk}(\pi,x,\lambda)| \leqslant Me^{|\operatorname{Im}\lambda|(\pi-x)}, \qquad \text{а} \ \ |e_{jk}(t,\lambda)| \leqslant Me^{|\operatorname{Im}\lambda| t},$$

где M не зависит от t, x и λ. Применяя лемму 3.2, видим, что вне полосы Π_{α_0},

$$|g_{jk}(t,x,\lambda)| \leqslant M\left(e^{|\operatorname{Im}\lambda|(x-t-\pi)} + e^{|\operatorname{Im}\lambda|(t-x)}\right) \leqslant 2M,$$

поскольку оба числа $x-t-\pi$ и $t-x$ неположительны. Для оценки функции $G(t,x,\lambda)$ на треугольнике $0 \leqslant x < t \leqslant \pi$ воспользуемся соотношением (3.7), согласно которому $|g_{jk}(t,x,\lambda)| = |g^*_{kj}(x,t,\overline{\lambda})|$. Поскольку координаты точки x и t поменялись местами, а $\overline{\lambda}$ по-прежнему лежит вне полосы Π_{α_0}, то мы можем применить рассуждения, приведенные выше, к функциям g^*_{kj} и вне полосы Π_{α_0} оценка функции G получена. Согласно асимптотическим представлениям (2.3) и (3.6), функции e_{jk} и $\mathcal{E}_{jk}$ ограничены в произвольной полосе Π_α. Отсюда и из леммы 3.2 следует ограниченность функции $G(t,x,\lambda)$ в $\overline{\Omega}_{\alpha_0,\delta}$.

Докажем второе утверждение теоремы. Зафисксируем числа α и δ. Из теоремы ii следует, что

$$e_{jk}(x,\lambda) = e^0_{jk}(x,\lambda) + o(1) \quad \text{при} \ \ \Pi_\alpha \ni \lambda \to \infty$$

равномерно по x, а из (3.6) следует, что и

$$\mathcal{E}_{jk}(a,x,\lambda) = \mathcal{E}^0_{jk}(a,x,\lambda) + o(1) \quad \text{при} \ \ \Pi_\alpha \ni \lambda \to \infty$$

равномерно по x и a. Согласно лемме 3.2, найдутся такие положительные числа R и M, что при всех $\lambda \in \overline{\Omega_{\alpha,\delta,R}}$ выполнены неравенства $|\Delta(\lambda)| \geqslant M$ и $|\Delta_0(\lambda)| \geqslant M$. Тогда из утверждения 2.1 следует

$$\Delta^{-1}(\lambda) = \Delta_0^{-1}(\lambda) + o(1) \quad \text{при} \ \ \overline{\Omega_{\alpha,\delta,R}} \ni \lambda \to \infty.$$

Подставляя эти асимптотические представления в равенство (3.8) (записанное для $G(t,x,\lambda)$ и $G_0(t,x,\lambda)$) и учитывая равномерную ограниченность функций $\Delta^{-1}(\lambda)$, $e^0_{jk}(x,\lambda)$ и $\mathcal{E}^0_{jk}(t,x,\lambda)$ на множестве $\lambda \in \overline{\Omega_{\alpha,\delta,R}}$, x, $t \in [0,\pi]$, получаем необходимую оценку. $\square$

Факты, которые мы сформулируем ниже, хорошо известны и основаны на канонической работе [6] (см. также [13, Гл. 1]).

Определение 3.2. Система функций $\mathbf{y}^{j,1}$, $\mathbf{y}^{j,2}$, …, $\mathbf{y}^{j,m}$ называется *цепочкой функций, присоединенных к собственной функции* $\mathbf{y}^j$ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с собственным значением λ_0, если все они лежат в области определения $\mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,U})$ и удовлетворяют системе уравнений $\mathcal{L}_{P,U}\mathbf{y}^{j,q} = \lambda_0\mathbf{y}^{j,q} + \mathbf{y}^{j,q-1}$, $q = 1, \ldots, m$ (здесь и далее $\mathbf{y}^{j,0} = \mathbf{y}^j$ — собственные функции). Будем говорить, что собственная функция $\mathbf{y}^j$ *имеет кратность* m_0, если существует цепочка из присоединенных к ней функций длины $m_0 - 1$, но не существует такой цепочки длины m_0. Пусть p — размерность собственного подпространства $\mathcal{H}_0$, отвечающего собственному значению λ_0. Обозначим через $\mathbf{y}^1 \in \mathcal{H}_0$ собственную функцию, имеющую максимальную кратность, через $\mathbf{y}^2 \in \mathcal{H}_0$ — собственную функцию максимальной кратности, линейно независимую с $\mathbf{y}^1$ и т.д. Пусть m_j — кратность собственной функции $\mathbf{y}^j$, а $\mathbf{y}^{j,k}$, $k = 1, \ldots, m_j - 1$ — соответствующие присоединенные функции. Система $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$, где $1 \leqslant j \leqslant p$, а $0 \leqslant k \leqslant m_j - 1$, называется *канонической системой* собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, отвечающей собственному значению λ_0.

Легко видеть, что любая каноническая система $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$ образуют базис в собственном подпространстве, отвечающем собственному значению λ_0. Следуя работе [6], обозначим через $\mathbf{yz}$ оператор в пространстве $\mathbb{H}$, действующий по правилу $\mathbf{f} \mapsto \langle \mathbf{f}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y}$.

Теорема v. Для любого собственного значения λ_0 регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ размерность p собственного подпространства не превосходит 2. Кратность нуля функции $\Delta(\lambda)$ в точке λ_0 совпадает с суммой m_1+m_2 (в случае $p=1$ полагаем $m_2=0$). При этом функция $G(t,x,\lambda)$ имеет полюс порядка m_1 в точке λ_0. Пусть $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$ — произвольная каноническая система сосбтвенных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, отвечающая собственному значению λ_0. Тогда найдется такая каноническая система $\{\mathbf{z}^{j,k}\}$ собственных и присоединенных функций сопряженного оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$, отвечающая собственному значению $\overline{\lambda_0}$, что главная часть ряда Лорана резольвенты $\mathfrak{R}(\lambda)=(\mathcal{L}_{P,U}-\lambda I)^{-1}$ в точке λ_0 будет иметь вид

$$\begin{aligned}(3.9)\quad &\frac{\mathbf{y}^{1,0}\overline{\mathbf{z}^{1,0}}}{(\lambda-\lambda_0)^{m_1}}+\frac{\mathbf{y}^{1,0}\overline{\mathbf{z}^{1,1}}+\mathbf{y}^{1,1}\overline{\mathbf{z}^{1,0}}}{(\lambda-\lambda_0)^{m_1-1}}+\dots+\frac{\mathbf{y}^{1,0}\overline{\mathbf{z}^{1,m_1-1}}+\dots+\mathbf{y}^{1,m_1-1}\overline{\mathbf{z}^{1,0}}}{\lambda-\lambda_0}+\\ &+\frac{\mathbf{y}^{2,0}\overline{\mathbf{z}^{2,0}}}{(\lambda-\lambda_0)^{m_2}}+\frac{\mathbf{y}^{2,0}\overline{\mathbf{z}^{2,1}}+\mathbf{y}^{2,1}\overline{\mathbf{z}^{2,0}}}{(\lambda-\lambda_0)^{m_2-1}}+\dots+\frac{\mathbf{y}^{2,0}\overline{\mathbf{z}^{2,m_2-1}}+\dots+\mathbf{y}^{2,m_2-1}\overline{\mathbf{z}^{2,0}}}{\lambda-\lambda_0}.\end{aligned}$$

Определение 3.3. Для каждого собственного значения λ_0 регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ выберем произвольную каноническую систему $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$ собственных и присоединенных функций с тем лишь условием, что собственные функции этой системы имеют единичную норму. В силу теоремы v, количество векторов в системе $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$ совпадает с порядклм нуля λ_0 функции $\Delta(\lambda)$. Занумеруем векторы этой системы (в порядке $\mathbf{y}^1,\ \mathbf{y}^{1,1},\dots,\mathbf{y}^{1,m_1-1},\ \mathbf{y}^2,\ \mathbf{y}^{2,1},\dots,\mathbf{y}^{2,m_2-1}$) индексами $n\in\mathbb{Z}$ в соответствии с нумерацией собственных значений. *Системой собственных и присоединенных функций* $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ мы будем называть объединение всех канонических систем. Оператор

$$\mathcal{P}_{\lambda_0}=\mathbf{y}^{1,0}\overline{\mathbf{z}^{1,m_1-1}}+\dots+\mathbf{y}^{1,m_1-1}\overline{\mathbf{z}^{1,0}}+\mathbf{y}^{2,0}\overline{\mathbf{z}^{2,m_2-1}}+\dots+\mathbf{y}^{2,m_2-1}\overline{\mathbf{z}^{2,0}}$$

называется *спектральным проектором на корневое подпространство*, отвечающее собственному значению λ_0.

Полученное в теореме 3.1 асимптотическое представление для функции Грина позволяет нам получить асимптотические формулы для спектральных проекторов в случае регулярных, но не сильно регулярных краевых условий. В этом случае все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ двукратны (см. утверждение 1.4), а именно $\lambda^0_{2n}=\lambda^0_{2n+1}$, $n\in\mathbb{Z}$. Поскольку $\lambda_n=\lambda^0_n+o(1)$, то $|\lambda_{2n}-\lambda_{2n+1}|\to 0$ при $n\to\pm\infty$.

Определение 3.4. Выберем число N_0 так, что для всех n, $|n|\geqslant N_0$ выполнено $|\lambda_{2n}-\lambda^0_{2n}|<1/8$ и $|\lambda_{2n+1}-\lambda^0_{2n}|<1/8$. Обозначим

(3.10)

$$\mathcal{P}_n:=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda^0_{2n}|=1/4}\mathfrak{R}(\lambda)d\lambda,\quad n=\pm N_0,\ \pm(N_0+1),\dots,\quad \text{где } \mathfrak{R}(\lambda)=(\mathcal{L}_{P,U}-\lambda I)^{-1}.$$

Из представления (3.9) следует, что $\mathcal{P}_n$ является спектральным проектором на корневое подпространство, отвечающее собственным значениям λ_{2n} и λ_{2n+1}, которое мы обозначим $\mathcal{H}_n$. Определим также операторы

$$\mathcal{P}^0_n:=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda^0_{2n}|=1/4}\mathfrak{R}_0(\lambda)d\lambda,\quad n=\pm N_0,\ \pm(N_0+1),\dots,\quad \text{где } \mathfrak{R}_0(\lambda)=(\mathcal{L}_{0,U}-\lambda I)^{-1}.$$

— спектральные проекторы на корневые подпространства оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, отвечающие собственным значениям $\lambda^0_{2n}=\lambda^0_{2n+1}$.

Заметим, что оператор $\mathfrak{R}(\lambda) : \mathbf{f} \mapsto \int_0^\pi G(t,x,\lambda)\mathbf{f}(t)dt$ корректно определен при $\lambda \neq \lambda_n$ не только как оператор в пространстве $\mathbb{H}$, но и как оператор из $L_1[0,\pi]$ в $C[0,\pi]$. То же справедливо и для операторов $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{P}_n^0$. В следующей теореме мы оценим норму их разности именно как операторов из $L_1[0,\pi]$ в $C[0,\pi]$.

Теорема 3.2. *Для любого регулярного, но не сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$:*

$$\|\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_n^0\|_{L_1\to C} \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \ \ |n| \to \infty.$$

Доказательство. Легко видеть, что при $|n| \geqslant N_0$

$$\|\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_n^0\|_{L_1\to C} \leqslant \frac{1}{4} \max_{|\lambda-\lambda_{2n}^0|=1/4} \ \max_{j,k\in\{1,2\}} \ \sup_{t,x\in[0,\pi]} |g_{jk}(t,x,\lambda) - g_{jk}^0(t,x,\lambda)|.$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 3.1. □

4. Минимальность, полнота и базисность Рисса.

Нашей следующей задачей является доказательство полноты и минимальности системы собственных и присоединенных функций регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Мы проведем это доказательство классическим способом, причем ключевую роль будет играть оценка, полученная в теореме 3.1. Напомним, что система $\{x_n\}$ векторов банахова пространства H называется *полной*, если ее линейная оболочка плотна в H. Система называется *минимальной*, если при удалении произвольного вектора x_k из системы свойство полноты теряется.

Теорема 4.1. *Пусть потенциал P имеет вид* (1.7)*, а краевые условия* (1.5) *регулярны. Тогда система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ (см. определение 3.3) полна и минимальна в пространстве $\mathbb{H}$.*

Доказательство. Вначале докажем полноту системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Пусть функция $\mathbf{f} \in \mathbb{H}$ ортогональна всем векторам этой системы. Зафиксируем произвольный вектор $\mathbf{g} \in \mathbb{H}$ и рассмотрим функцию $\Phi(\lambda) := \langle \mathfrak{R}^*(\lambda)\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle$, определенную в области $\mathbb{C} \setminus \{\overline{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Согласно (3.9), эта функция имеет устранимые особенности в точках $\overline{\lambda_n}$, т.е. после доопределения в них, является целой. В силу теоремы 3.1, для любого $\delta > 0$ в области $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} U_\delta(\overline{\lambda_n})$ справедлива оценка

$$|\Phi(\lambda)| \leqslant M\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{H}}\|\mathbf{g}\|_{\mathbb{H}},$$

где M не зависит от λ. Заметим, что для случая сильно регулярных краевых условий

$$\inf_{n\neq m} |\overline{\lambda_n^0} - \overline{\lambda_m^0}| = d > 0$$

(см. утверждение 1.4). В регулярном, но не сильно регулярном случае,

$$\inf_{|n-m|\geqslant 2} |\overline{\lambda_n^0} - \overline{\lambda_m^0}| = d > 0.$$

Выберем число δ равным $d/4$ — тогда круги $U_\delta(\overline{\lambda_n^0})$ либо не пересекаются, либо разбиваются на пары, не пересекающиеся между собой. Этим же свойством, очевидно, обладают и круги $U_\delta(\overline{\lambda_n})$ для всех n таких, что $|\overline{\lambda_n} - \overline{\lambda_n^0}| < d/4$. В силу теоремы 2.2, последнее неравенство выполнено при $|n| \geqslant N$ для некоторого N. Таким образом, вне некоторого круга $\{|z| \leqslant R\}$ множество точек λ, для которых неравенство

$|\Phi(\lambda)| \leqslant M\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{H}}\|\mathbf{g}\|_{\mathbb{H}}$ еще не доказано, представляет собой счетное объединение ограниченных непересекающихся областей. По принципу максимума, это неравенство будет справедливо в каждой из данных областей, значит, и всюду в области $\{|z| > R\}$, а следовательно, и во всей комплексной плоскости. Из теоремы Лиувилля следует, что функция $\Phi(\lambda)$ является постоянной. Тогда функция

$$\Phi'(\lambda) = \langle(\mathfrak{R}^*(\lambda))'\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \langle(\mathfrak{R}^*(\lambda))^2\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle \equiv 0.$$

Поскольку функция $\mathbf{g}$ выбиралась произвольной, то $(\mathfrak{R}^*(\lambda))^2\mathbf{f} \equiv 0$, откуда $\mathbf{f} = 0$. Полнота системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ доказана.

Для доказательства минимальности системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ достаточно доказать существование биортогональной системы. Мы построим ее на базе системы $\{\mathbf{z}_n\}$, полученной объединением всех канонических систем $\{\mathbf{z}^{j,k}\}$, определенных в разложении (3.9) (т.е. системы собственных и присоединенных функций оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$). Рассмотрим некоторое фиксированное собственное значение λ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ алгебраической кратности p и обозначим соответствующее корневое подпространство через $\mathcal{H}_\lambda$. Корневое подпространство, отвечающее собственному значению $\overline{\lambda}$ оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$ обозначим $\mathcal{H}^*_\lambda$. Прежде всего заметим, что если $\mathcal{L}_{P,U}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$, $(\mathcal{L}_{P,U})^*\,\mathbf{z} = \mu\mathbf{z}$ и $\mu \neq \overline{\lambda}$, то $\mathbf{y} \perp \mathbf{z}$, т.е. $\mathcal{H}_\lambda \perp \mathcal{H}^*_\mu$ при $\lambda \neq \overline{\mu}$. Таким образом, для построения биортогональной системы, достаточно в каждом пространстве $\mathcal{H}^*_\lambda$ построить базис $\{\mathbf{w}^{j,k}\}$, биортогональный системе $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$. Нам не потребуется явное представление векторов $\mathbf{w}^{j,k}$, так что мы ограничимся доказательством существования такого базиса. Представим этот базис в виде линенйых комбинаций системы $\{\mathbf{z}^{j,k}\}$, определенной в (3.9). Записав условия биортогональности, получим систему линейных уравнений с матрицей Грама $\left(\langle\mathbf{y}^{j,k}, \mathbf{z}^{l,m}\rangle\right)$. Разрешимость системы равносильна невырожденности данной матрицы. Если же матрица вырождена, то найдется ненулевой вектор $\sum c_{j,k}\mathbf{z}^{j,k}$, ортогональный всем функциям $\mathbf{y}^{j,k}$, а значит и вообще всей системе собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Это противоречит полноте данной системы. Минимальность системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ доказана. □

Определение 4.1. Объединение всех систем $\{\mathbf{w}^{j,k}\}$ будем называть *биортогональной системой* и обозначать $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. При этом нумерацию мы ведем так, что $\langle\mathbf{y}_n, \mathbf{w}_m\rangle = \delta_{nm}$.

Мы переходим к доказательству базисности системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Напомним (см. [4, Гл. 6]), что система $\{y_n\}_1^\infty$ в гильбертовом пространстве H называется *базисом Рисса*, если существует ограниченный и ограниченно обратимый оператор A такой, что система $\{Ay_n\}_1^\infty$ является ортонормированным базисом в H. Напомним еще, что система $\{x_n\}_1^\infty$ элементов гильбертова пространства H называется *бесселевой*, если существует $c > 0$ такое, что для любого $x \in H$: $\sum_n |(x, x_n)|^2 \leqslant c\|x\|^2$. Мы докажем, что для любого сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса в $\mathbb{H}$. Отметим, что этот факт не является простым. Так, например, он не следует из асимптотических формул (2.11). Краткое доказательство базисности Рисса для этого случая было приведено в недавней работе [37]. Мы проведем здесь подробное доказательство, основываясь на теореме Бари, причем основную роль будут играть представление (2.12) и лемма 4.1, приведенная ниже.

Теорема vi (Н. К. Бари)**.** Пусть система $\{\mathbf{y}_n\}$ гильбертова пространства H полна и минимальна, равно как и биортогональная к ней система $\{\mathbf{z}_n\}$. Если обе эти системы обладают свойством бесселевости, то они являются базисами Рисса в H.

Напомним, что *пространством Харди* $H_2(\mathbb{C}_+)$ называется пространство аналитических в верхней полуплоскости функций, для которых норма

$$\|F\|_{H_2} = \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Для доказательства следующей леммы нам потребуется теорема Карлесона (см., например, [3, теорема II.3.9]).

Теорема vii (Л. Карлесон)**.** Пусть σ — мера Карлесона в верхней полуплоскости, т.е. для любого квадрата $Q_{a,h} = \{z : \operatorname{Re} z \in (a, a+h),\ \operatorname{Im} z \in (0,h)\}$ мера $\sigma(Q_{a,h})$ конечна и $\sigma(Q_{a,h}) \leqslant \gamma h$ для некоторого $\gamma > 0$. Тогда

$$\forall f \in H_2(\mathbb{C}_+): \quad \int |f|^2 \, d\sigma \leqslant C\|f\|^2_{H_2}, \quad \text{где} \;\; C = C(\gamma).$$

Лемма 4.1. *Пусть $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — последовательность собственных значений оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом $P(\cdot) \in L_1[0,\pi]$ и регулярными краевыми условиями U. Тогда для всех $f \in L_2[0,\pi]$ справедлива оценка*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_0^\pi f(x) e^{i\lambda_n x} \, dx \right|^2 \leqslant C\|f\|^2_{L_2}, \quad \text{где} \;\; C = C(P,U).$$

Доказательство. Напомним, что все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ лежат в полосе Π_α для некоторого $\alpha = \alpha(P,U) > 0$. Рассмотрим целую функцию

$$F(z) = \int_0^\pi f(x) e^{(iz+\alpha+1)x} \, dx.$$

Из теоремы Пэли–Винера следует, что функция F принадлежит пространству Харди $H_2(\mathbb{C}_+)$ в верхней полуплоскости, причем $\|F\|_{H_2} \leqslant C\|f\|_{L_2}$. Положим $z_n = \lambda_n + i\alpha + i$ и заметим, что

$$F(z_n) = \int_0^\pi f(x) e^{i\lambda_n x} \, dx.$$

Пусть теперь $\mu(Q_{a,h})$ — количество точек z_n (с учетом кратности), лежащих внутри квадрата

$$Q_{a,h} = \{z : \operatorname{Re} z \in (a, a+h),\ \operatorname{Im} z \in (0,h)\}.$$

Легко видеть, что $\mu(Q_{a,h}) = 0$ при $h < 1$. Поскольку $\lambda_n = n + \varkappa_n + o(1)$, где $\varkappa_n$ зависят только от четности номера n, то функция $s(h) = \sup_{a\in\mathbb{R}} \mu(Q_{a,h})$ конечна для любого h и $s(h) \sim h$ при $h \to \infty$. Тогда найдется число $\gamma > 0$ такое, что $s(h) \leqslant \gamma h$ при всех $h > 0$. Применив теорему vii с мерой $\sigma = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{z_n}$, получим оценку

$$\|\{F(z_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_{l_2} \leqslant C(\gamma)\|F\|_{H_2},$$

что и влечет утверждение леммы. $\square$

Напомним, что все собственные векторы системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ нормированы. Поскольку все собственные значения сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ просты, начиная с некоторого номера N, то при всех $|n|>N$: $\|\mathbf{y}_n\|=1$. Спектр оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$ совпадает с множеством $\{\overline{\lambda}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ с совпадением кратностей, а значит, при $|n|>N$, все векторы $\mathbf{w}_n$ биортогональной системы также являются собственными для оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$. Однако, в отличие от $\mathbf{y}_n$, они уже могут иметь неединичную норму.

Лемма 4.2. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — произвольный сильно регулярный оператор Дирака, а $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система, биортогональная к $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (см. определение 4.1). Тогда последовательность $\{\|\mathbf{w}_n\|\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ограничена.*

Доказательство. Обозначим $\widetilde{\mathbf{w}}_n=\frac{\mathbf{w}_n}{\|\mathbf{w}_n\|}$ и заметим, что $1=\langle\mathbf{y}_n,\mathbf{w}_n\rangle=\|\mathbf{w}_n\|\langle\mathbf{y}_n,\widetilde{\mathbf{w}}_n\rangle$, а значит $\langle\mathbf{y}_n,\mathbf{w}_n\rangle\neq 0$, $n\in\mathbb{Z}$. Кроме того, неравенство $\|\mathbf{w}_n\|<C$ равносильно неравенству $\langle\mathbf{y}_n,\widetilde{\mathbf{w}}_n\rangle>1/C$. Пусть $\mathbf{y}_n^0$ — нормированные собственные функции оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, а $\mathbf{w}_n^0$ — нормированные собственные функции оператора $\mathcal{L}_{0,U^*}$. Используя (1.12), получим

$$\mathbf{y}_n^0=\left(\omega_{1,j}\,e^{i\lambda_n^0x},\,\omega_{2,j}\,e^{-i\lambda_n^0x}\right)^t,\qquad \mathbf{w}_n^0=\left(\omega_{1,j}^*\,e^{i\overline{\lambda_n^0}x},\,\omega_{2,j}^*\,e^{-i\overline{\lambda_n^0}x}\right)^t,$$

где $j=0$ при четном n и $j=1$ при нечетном n. Тогда

$$\langle\mathbf{y}_n^0,\mathbf{w}_n^0\rangle=\pi(\omega_{1,j}\overline{\omega_{1,j}^*}+\omega_{2,j}\overline{\omega_{2,j}^*}),$$

т.е. скалярные произведения $\langle\mathbf{y}_n^0,\mathbf{w}_n^0\rangle$ зависят только от четности индекса n. Поскольку по определению $\langle\mathbf{y}_n^0,\mathbf{w}_n^0\rangle\neq 0$, то $|\langle\mathbf{y}_n^0,\mathbf{w}_n^0\rangle|\geqslant C>0$ при всех $n\in\mathbb{Z}$. Все векторы $\mathbf{y}_n$ и $\mathbf{w}_n$ при достаточно больших $|n|$ являются собственными. Из теоремы 2.3 имеем $\langle\mathbf{y}_n,\widetilde{\mathbf{w}}_n\rangle=\langle\mathbf{y}_n^0,\mathbf{w}_n^0\rangle+o(1)$, т.е. числа $|\langle\mathbf{y}_n,\widetilde{\mathbf{w}}_n\rangle|$ отделены от нуля при достаточно больших (а значит и при всех) n. $\square$

Нам потребуется еще одно несложное утверждение. Оно, однако, является ключевым для доказательства теоремы 4.2.

Лемма 4.3. *Пусть система $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ является бесселевой в пространстве $L_2[a,b]$, а $\{\tau_n(x)\}_1^\infty$ — абсолютно непрерывные на $[a,b]$ функции, причем*

$$|\tau_n(a)|\leqslant T,\qquad |\tau_n'(x)|\leqslant\tau(x)\in L_1[a,b],\quad n=1,2,\dots,\tag{4.1}$$

где число T и функция τ не зависят от n. Тогда система $\{\varphi_n(x)\tau_n(x)\}_1^\infty$ также является бесселевой в пространстве $L_2[a,b]$.

Доказательство. Поскольку

$$\varphi_n(x)\tau_n(x)=\varphi_n(x)\tau_n(a)+\varphi_n(x)(\tau_n(x)-\tau_n(a)),$$

а из оценки $|\tau_n(a)| \leqslant T$ следует бесселевость системы $\{\varphi_n(x)\tau_n(a)\}$, то далее, заменив $\tau_n(x)$ на $\tau_n(x)-\tau_n(a)$, можно считать, что $\tau_n(a)=0$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{N} |(f, \varphi_n\tau_n)|^2 = \sum_{n=1}^{N} \left| \int_a^b f(x)\overline{\varphi}_n(x) \int_a^x \overline{\tau}_n'(\xi)\, d\xi\, dx \cdot \int_a^b \overline{f}(y)\varphi_n(y) \int_a^y \tau_n'(\zeta)\, d\zeta\, dy \right| =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left| \int_a^b \int_a^b \overline{\tau}_n'(\xi)\tau_n'(\zeta) \left(\int_\xi^b f(x)\overline{\varphi}_n(x)\, dx \int_\zeta^b \overline{f}(y)\varphi_n(y)\, dy \right) d\xi\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \int_a^b \tau(\xi)\tau(\zeta) \sum_{n=1}^{N} \left| (f\chi_{[\xi,b]}, \varphi_n) \right| \left| (\varphi_n, f\chi_{[\zeta,b]}) \right| \, d\xi\, d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant c^2 \int_a^b \int_a^b \tau(\xi)\tau(\zeta) \cdot \|f\chi_{[\xi,b]}\| \cdot \|f\chi_{[\zeta,b]}\|\, d\xi\, d\zeta \leqslant c^2 \int_a^b \int_a^b \tau(\xi)\tau(\zeta)\, d\xi\, d\zeta \cdot \|f\|^2.$$

Устремив $N \to \infty$, получаем утверждение леммы. □

Теорема 4.2. *Для любого сильно регулярного оператора* $\mathcal{L}_{P,U}$ *с потенциалом* $P \in L_1[0,\pi]$ *вида* (1.7) *система* $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *собственных и присоединенных функций, введенная в определении 3.3, образует базис Рисса в пространстве* $\mathbb{H}$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой vi. Полнота и минимальность системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ уже доказана в теореме 4.1, так что остается проверить бесселевость систем $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Вначале мы докажем бесселевость системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Поскольку краевые условия сильно регулярны, то все собственные значения λ_n оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ просты при $|n| > N$ для некоторого N. Тогда система $\{\mathbf{y}_n\}_{|n|>N}$ состоит только из нормированных собственных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ и мы можем воспользоваться асимптотическим представлением (2.12) $y_{1,n}(x) = e^{i\lambda_n x}\tau_{1,n}(x)$, $y_{2,n}(x) = e^{-i\lambda_n x}\tau_{2,n}(x)$. Тогда из леммы 4.1 и леммы 4.3 следует бесселевость систем $\{y_{1,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{y_{2,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $L_2[0,\pi]$, что и означает бесселевость системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в $\mathbb{H}$. Перейдем к биортогональной системе $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Поскольку функции $\mathbf{w}_n$ при $|n| > N$ являются собственными функциями сопряженного оператора $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$, то к системе $\{\mathbf{w}_n/\|\mathbf{w}_n\|\}_{|n|>N}$ применимы те же рассуждения, что и к системе $\{\mathbf{y}_n\}_{|n|>N}$. Для завершения доказательства достаточно вспомнить (лемма 4.2), что $\|\mathbf{w}_n\| < C\ \forall n \in \mathbb{N}$ для некоторой константы C. □

5. Базисность Рисса из подпространств.

Напомним (см. [4, Гл. 6]), что система подпространств $\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty$ называется *базисом* в гильбертовом пространстве H, если любой вектор $x \in H$ разлагается единственным образом в виде ряда $x = \sum_{n=1}^\infty x_n$, где $x_n \in \mathcal{H}_n$. Базис $\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty$ из подпространств является *ортогональным*, если $\mathcal{H}_n \perp \mathcal{H}_m$ при $n \neq m$. Система $\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty$ называется *базисом Рисса из подпространств*, если существует ограниченный и ограниченно обратимый оператор A такой, что система $\{A(\mathcal{H}_n)\}_1^\infty$ является ортогональным базисом из подпространств в H. В случае регулярных, но не сильно регулярных краевых условий, система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ уже не обязана образовывать базис Рисса (см., например, [27] и [2]). Можно, однако, показать, что в этом случае всегда имеется базисность Рисса из подпространств, причем все подпространства двумерны. Идея доказательства этого факта содержится в статье

[37]. Мы проведем здесь подробное доказательство, следуя классическим работам [5] и [11]. Оно опирается на два замечательных факта — теорему фон Неймана и теорему Карлесона (см. [3, Гл. VII, теорема 2.2 и лемма 5.4]). Мы начнем с доказательства следующего полезного утверждения.

Лемма 5.1. *Любой (не обязательно сильно) регулярный оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом вида* (1.7) *представим в виде суммы $\mathcal{L}_{P,U} = A + V$, ограниченного в $\mathbb{H}$ оператора V и неограниченного замкнутого оператора A с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A) \subset \mathbb{H}$ и компактной резольвентой. При этом спектр $\sigma(A)$ расположен в некоторой полосе Π_α и состоит из собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Нумерацию этих собственных значений (с учетом их алгебраической кратности) можно провести так, чтобы выполнялись асимптотические равенства $\lambda_n = n + \varkappa_j + o(1)$ при $|n| \to \infty$, где $j = 0$, если n четно и $j = 1$, если n нечетно, причем геометрическая и алгебраическая кратности каждого собственного значения совпадают, т.е. оператор A не имеет присоединенных функций. Система нормированных собственных функций оператора A образует базис Рисса в $\mathbb{H}$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_{P,U} + V_0$, где $V_0 : \ (y_1, y_2) \mapsto (\kappa y_1, -\kappa y_2)$. Если краевые условия, задаваемые матрицей $\mathcal{U} = (C,\, D)$, сильно регулярны, то положим $\kappa = 0$. В противном случае подберем κ следующим образом. Поскольку $\mathcal{L}_{P,U} + V_0$ есть оператор Дирака вида (1.1) с потенциалом $\begin{pmatrix} \kappa & p_2(x) \\ p_3(x) & -\kappa \end{pmatrix}$, то к нему применимо утверждение 1.3. Из (1.6) следует, что $\gamma = 0$, $\widetilde{p}_2 = p_2$, $\widetilde{p}_3 = p_3$, т.е. $\mathcal{L}_{P,U} + V_0 = W\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}W^{-1}$. При этом краевые условия $\widetilde{U}$ задаются матрицей $\widetilde{\mathcal{U}} = (C,\, e^{i\pi\kappa}D)$. По определению 1.2, краевые условия $\widetilde{U}$ сильно регулярны, если

$$(J_{12} + e^{2i\pi\kappa}J_{34})^2 + 4e^{2i\pi\kappa}J_{14}J_{23} \neq 0.$$

Таким образом, достаточно выбрать κ так, чтобы точка $\mu = e^{2i\pi\kappa}$ не являлась нулем функции

$$\mu^2 J_{34}^2 + 2\mu(J_{12}J_{34} + 2J_{14}J_{23}) + J_{12}^2,$$

что возможно, поскольку эта функция не равна нулю тождественно (это следует из регулярности краевых условий U). Итак, мы представили оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ в виде

$$\mathcal{L}_{P,U} = W\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}W^{-1} - V_0,$$

где краевые условия $\widetilde{U}$ сильно регулярны. Тогда лишь конечное число собственных значений оператора $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}$ могут иметь алгебраическую кратность, большую единицы. Пусть λ_0 — одно из таких собственных значений, $\mathcal{H}_0$ — соответствующее корневое подпространство, $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$ — произвольная каноническая система собственных и присоединенных функций в $\mathcal{H}_0$, построенная в определении 3.3, а $\mathcal{P}_0$ — спектральный проектор на H_0 (см. определение 3.3). Определим оператор K_0 на подпространстве $\mathcal{H}_0$ равенствами

$$K_0\mathbf{y}^{j,0} = 0, \qquad K_0\mathbf{y}^{j,k} = -\mathbf{y}^{j,k-1}$$

для всех $k \neq 0$. Тогда оператор $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}} + K_0\mathcal{P}_0$ диагонален на подпространстве $\mathcal{H}_0$. Пусть оператор K равен сумме операторов $K_0\mathcal{P}_0$ по всем корневым подпространствам, отвечающим кратным собственным значениям оператора $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}$ (число слагаемых в этой сумме конечно, так что оператор K ограничен). Операторы $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}} + K$ и $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}$ имеют одинаковый спектр и одинаковую систему собственных и присоединенных функций,

причем все эти функции являются для оператора $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}} + K$ собственными. Остается положить

$$A := W(\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}} + K)W^{-1} \qquad \text{и} \qquad V := -WKW^{-1} - V_0.$$

$\square$

Следующее утверждение известно в теории пространств Харди. Мы, однако, затрудняемся дать точную ссылку и потому приведем его с полным доказательством. Напомним, что *пространством Харди* H_∞ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ называется пространство голоморфных и ограниченных в $\mathbb{C}_+$ функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{C}_+} |f(z)|$.

Утверждение 5.1. *Пусть последовательность* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *лежит в полосе* $1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2h$*, причем*

$$z_{2n} = 2n + \varkappa + o(1) \qquad \text{и} \qquad z_{2n+1} = 2n + \varkappa + o(1)$$

при $|n| \to \infty$*. Тогда существует такой номер* $N \in \mathbb{N}$ *и такое число* μ*, что для всякого конечного подмножества* $J \subset \{n \in \mathbb{Z} : |n| \geqslant N\}$ *и всякого номера* $K \geqslant \max\{|n| : n \in J\}$ *найдется рациональная функция* $f_K \in H_\infty$*,* $\|f_K\|_\infty \leqslant \mu$*, такая, что при всех* n*,* $N \leqslant |n| \leqslant K$*,*

$$f_K(z_{2n}) = f_K(z_{2n+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in J, \\ 0, & \text{если } n \notin J, \end{cases} \qquad \text{а если } z_{2n} = z_{2n+1}, \text{ то } f'_K(z_{2n}) = 0. \tag{5.1}$$

Определение 5.1. (см. [3, Гл. VII]) Последовательность точек $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ из $\mathbb{C}_+$ называется *интерполяционной*, если

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k\neq n} \frac{|z_k - z_n|}{|z_k - \overline{z}_n|} \geqslant \delta > 0. \tag{5.2}$$

Теорема viii (Л. Карлесон)**.** Пусть $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — интерполяционная последовательность точек верхней полуплоскости. Тогда для любого $K \in \mathbb{N}$ существуют рациональные функции $f_{j,K} \in H_\infty$, $1 \leqslant j \leqslant K$, такие, что

$$f_{j,K}(z_l) = \delta_{j\,l},\ 1 \leqslant j,\, l \leqslant K,$$

причем

$$\sup_{z\in\mathbb{C}_+} \sum_{j=1}^{K} |f_{j,K}(z)| \leqslant M, \quad \text{где} \ \ M = \frac{9(3-\delta^2)^2}{4\delta^4}.$$

Лемма 5.2. *Пусть точки* z_1 *и* z_2*,* $z_2 \neq z_1$*, лежат в полосе* $\{z : 1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2h\}$*, а числа* w_1 *и* w_2 *произвольны. Тогда существует такая рациональная функция* $\varphi \in H_\infty$*, что* $\varphi(z_1) = w_1$*,* $\varphi(z_2) = w_2$*, причем*

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant 8h \left| \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} \right| + 2|w_1| + 2|w_2|. \tag{5.3}$$

Пусть точка z_0 *лежит в той же полосе, а* $w_0 \in \mathbb{C}$ *произвольно. Тогда существует такая рациональная функция* $\varphi \in H_\infty$*, что* $\varphi(z_0) = 1$*,* $\varphi'(z_0) = w_0$*, причем*

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant 1 + 4h|w_0|. \tag{5.4}$$

Доказательство. В первом случае возьмем $\varphi(z)=k\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}$, где числа $z_0\in\mathbb{C}_+$ и $k\in\mathbb{C}$ находятся из условий $f(z_1)=w_1$, $f(z_2)=w_2$. Во втором случае положим $\varphi(z)=1+k\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}$, где число k находится из условия $\varphi'(z_0)=w_0$. Легко видеть, что в первом случае $\|\varphi\|_\infty=|k|$, а во втором случае $\|\varphi\|_\infty=|k|+1$. Оценки (5.3) и (5.4) получаются теперь прямыми вычислениями, которые мы здесь опускаем. $\square$

Лемма 5.3. *Если точки* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *лежат в полосе* $\{z : 1\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 2h\}$ *и* $\inf_{n\neq k}|z_n-z_k|\geqslant 1$, *то из условия*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\neq n}\frac{\operatorname{Im} z_n\cdot\operatorname{Im} z_k}{|\overline{z}_n-z_k|^2}\leqslant m<\infty$$

следует (5.2) *с* $\delta=e^{-32mh}$.

Доказательство. Зафиксируем номер n и обозначим $p_k=|z_k-z_n|/|z_k-\overline{z}_n|$. Заметим, что

$$\frac{1}{1+4h}\leqslant p_k\leqslant 1,\quad \text{откуда}\quad -\ln p_k\leqslant 8h(1-p_k^2)$$

Тогда

$$-\ln\prod_{k\neq n}\frac{|z_k-z_n|}{|z_k-\overline{z}_n|}\leqslant 8h\sum_{k\neq n}(1-p_k^2)=32h\sum_{k\neq n}\frac{\operatorname{Im} z_k\cdot\operatorname{Im} z_n}{|z_k-\overline{z}_n|^2}\leqslant 32mh.$$

Отсюда

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\prod_{k\neq n}p_k\geqslant e^{-32mh}.$$

$\square$

Доказательство утверждения 5.1. Найдем номер N_0, такой, что $|z_{2n}-(2n+\varkappa)|<1/8$ и $|z_{2n+1}-(2n+\varkappa)|<1/8$ при всех $|n|>N_0$. Отсюда следует, что

$$|z_{2n}-\overline{z}_{2k}|\geqslant 2|k-n|-1,\qquad |n|>N_0,\ |k|>N_0,$$

а значит

$$\sum_{n\neq k,\,|n|\geqslant N_0}\frac{\operatorname{Im} z_n\cdot\operatorname{Im} z_k}{|z_n-\overline{z}_k|^2}\leqslant 4h^2\sum_{n\neq k,\,|n|\geqslant N_0}\frac{1}{(2|n-k|-1)^2}\leqslant 8h^2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(2l-1)^2}=\pi^2h^2.$$

Та же оценка справедлива и для последовательности $\{z_{2n+1}\}_{|n|>N_0}$. Положим $m=\pi^2h^2$. Из леммы 5.3 следует, что обе последовательности являются интерполяционными, причем число δ из оценки (5.2) можно взять равным $e^{-32\pi^2h^3}$. Положим $M=9(3e^{64\pi^2h^3}-1)^2/4$ (см. теорему viii) и найдем номер $N\geqslant N_0$ такой, что

$$M|z_{2n}-z_{2n+1}|<1/4\qquad\text{для всех }\ |n|>N.$$

Пусть J — произвольное конечное подмножество $\{n : |n|\geqslant N\}$, а $K\geqslant\max\{|n| : n\in J\}$ — произвольный номер. Обозначим $\{g_{j,K}\}_{|j|=N}^{K}$ и $\{h_{j,K}\}_{|j|=N}^{K}$ — рациональные функции из теоремы viii, построенные по последовательностям $\{z_{2j}\}_{|j|=N}^{K}$ и $\{z_{2j+1}\}_{|j|=N}^{K}$ соответственно, т.е.

$$g_{j,K}(z_{2l})=h_{j,K}(z_{2l+1})=\delta_{jl}.$$

Далее, для каждого j, $N \leqslant |j| \leqslant K$, построим, пользуясь леммой 5.2, функцию $\varphi_{j,K}$ следующим образом. Если $z_{2j} \neq z_{2j+1}$, то потребуем, чтобы

$$\varphi_{j,K}(z_{2j}) = w_1 = \frac{1}{h_{j,K}(z_{2j})}, \qquad \varphi_{j,K}(z_{2j+1}) = w_2 = \frac{1}{g_{j,K}(z_{2j+1})}.$$

Заметим, что для любой функции $f \in H_\infty$ из интегральной формулы Коши следует оценка $\sup_{\operatorname{Im} z \geqslant 1} |f'(z)| \leqslant \|f\|_\infty$. Поскольку

$$|h_{j,K}(z_{2j})-1| = |h_{j,K}(z_{2j})-h_{j,K}(z_{2j+1})| \leqslant \sup_{\operatorname{Im} z\geqslant 1} |h'_{j,K}(z)||z_{2j}-z_{2j+1}| \leqslant M|z_{2j}-z_{2j+1}| \leqslant 1/4,$$

то числа $|1-w_1|$ и $|1-w_2|$ не превосходят $\min\{4/3M|z_{2j}-z_{2j+1}|,\, 1/3\}$. Тогда из (5.3) следует, что $\|\varphi_{j,K}\|_\infty \leqslant 24hM + 6$. Если $z_{2j} = z_{2j+1}$, то потребуем

$$\varphi_{j,K}(z_{2j}) = 1, \qquad \varphi'_{j,K}(z_{2j}) = -(g_{j,K}h_{j,K})'(z_{2j}) = -g'_{j,K}(z_{2j}) - h'_{j,K}(z_{2j}).$$

Тогда из (5.4) следует, что $\|\varphi_{j,K}\|_\infty \leqslant 8hM + 1$. Таким образом, для каждого j, $N \leqslant |j| \leqslant K$, определена рациональная функция

$$f_{j,K}(z) := g_{j,K}(z)h_{j,K}(z)\varphi_{j,K}(z) \in H_\infty,$$

для которой

$$f_{j,K}(z_{2l}) = f_{j,K}(z_{2l+1}) = \delta_{j\,l}, \quad l \neq j,\ N \leqslant |j|,\ l| \leqslant K,$$

причем

$$f'_{j,K}(z_{2l}) = 0, \text{ если } z_{2l} = z_{2l+1}.$$

Искомую функцию $f_K(z)$ определим суммой $f_K(z) = \sum_{j\in J} f_{j,K}(z)$. Тогда равенства (5.1) выполнены и $\forall z \in \mathbb{C}_+$

$$|f_K(z)| \leqslant \sum_{j\in J} |f_{j,K}(z)| \leqslant (24hM+6)\sum_{|j|=N}^{K} |g_{j,K}(z)||h_{j,K}(z)| \leqslant (24hM+6)M^2 = \mu. \qquad \square$$

Приступим к доказательству базисности Рисса из подпространств. Вначале мы сформулируем две теоремы, которые будут использоваться в доказательстве: теорему Гельфанда (см. [4, Гл.VI, §5]) и теорему фон Неймана (см. [14, Гл. XI]).

Теорема ix (И. М. Гельфанд)**.** Система $\{\mathcal{H}_n = \operatorname{Rn}\mathcal{P}_n\}$ является базисом Рисса из подпространств в замыкании своей линейной оболочки тогда и только тогда, когда

$$\sup_J \|\sum_{n\in J} \mathcal{P}_n\| < \infty, \tag{5.5}$$

где супремум берется по всем конечным подмножествам индексов.

Теорема x (Дж. фон Нейман)**.** Пусть T — произвольное сжатие в гильбертовом пространстве, т.е. $\|T\| \leqslant 1$, а функция f голоморфна в круге $|z| < r$, $r > 1$, и ограничена в круге $|z| \leqslant 1$ константой μ. Тогда $\|f(T)\| \leqslant \mu$.

Пусть оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ регулярен, но не сильно регулярен. Пусть $\mathcal{H}_n = \operatorname{Rn}\mathcal{P}_n$, $|n| \geqslant N_0$, — корневые подпространства этого оператора, введенные в определении 3.4. Определим дополнительно подпространство $\mathcal{H}_0 = \operatorname{Rn}\mathcal{S}_{N_0}$, где $\mathcal{S}_{N_0} := 1/(2\pi i)\int_\gamma \mathfrak{R}(\lambda)\,d\lambda$, а замкнутый кусочно–гладкий жорданов контур γ охватывает все собственные значения λ_n оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с номерами $n : |n| < 2N_0$, и только их.

Теорема 5.1. *Система $\{\mathcal{H}_0,\, \mathcal{H}_n\}_{|n|\geqslant N_0}$ образует базис Рисса из подпространств в пространстве $\mathbb{H}$.*

Доказательство. Применим теорему ix. Из теоремы 4.1 следует, что замыкание линейной оболочки системы $\{\mathcal{H}_0,\, \mathcal{H}_n\}_{|n|\geqslant N_0}$ совпадает со всем пространством $\mathbb{H}$, так что остается доказать выполнение свойства (5.5). Пользуясь леммой 5.1, представим оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ в виде суммы $\mathcal{L}_{P,U} = A+V$. Поскольку система собственных функций оператора A образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$, то найдется такое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, топологически эквивалентное исходному (т.е. $c_1\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\| \leqslant c_2\|\cdot\|_1$ для некоторых c_1 и c_2), относительно которого эта система является ортонормированным базисом (см. [4, Гл.VI, §2]). В силу оценки на нормы, свойство базисности системы подпространств $\{\mathcal{H}_n\}$ не изменится при переходе к новому скалярному произведению. В новом скалярном произведении оператор A диагонален в ортогонормированном базисе из своих собственных векторов, т.е. нормален. Тогда числовой образ $\{\langle A\mathbf{f},\mathbf{f}\rangle_1 :\ \|\mathbf{f}\|_1 = 1\}$ оператора A равен замыканию выпуклой оболочки спектра $\sigma(A)$, а значит лежит в некоторой горизонтальной полосе. Следовательно, числовой образ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ (относительно нового скалярного произведения) также лежит в некоторой полосе Π_α. Поскольку сдвиг не меняет свойств базисности, то далее можно работать с операторм $B = \mathcal{L}_{P,U} + i(\alpha+1)$, числовой образ и спектр которого лежат в полосе $1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2h$, где $h = \alpha+1$. Точки $\{\lambda_n + i(\alpha+1)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ спектра оператора B удовлетворяют условиям утверждения 5.1. Пусть числа N и μ определены в формулировке этого утверждения (они зависят только от оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ и, по построению, $N \geqslant N_0$), а

$$\nu := \|\mathcal{S}_{N_0}\|_1 + \sum_{|n|=N_0}^{N-1} \|\mathcal{P}_n\|_1.$$

Пусть $J \subset \{n \in \mathbb{Z} : |n| \geqslant N\}$ — произвольное конечное подмножество, K — произвольный номер, такой, что $K > \max\{|n| : n \in J\}$, а f_K — рациональная функция, построенная в утверждении. Из общей теории функционального исчисления операторов (см., например, [14, Гл.IX, §151]) и представления (3.9) следует, что $f_K(B) = \sum_{n\in J}\mathcal{P}_n$. Пусть $T := (B-i)(B+i)^{-1}$ — преобразование Кэли оператора B. Легко видеть, что

$$\forall x \in \mathfrak{D}(B) :\ \|(B+i)x\|_1^2 - \|(B-i)x\|_1^2 = 4\mathrm{Im}\,(Bx,x)_1 > 0,$$

откуда

$$\|(B-i)(B+i)^{-1}x\|_1 \leqslant \|x\|_1.$$

Так как подпространство $\mathfrak{D}(B) = \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,U})$ плотно в $\mathbb{H}$, то оператор T продолжается на все пространство и $\|T\|_1 \leqslant 1$. Обозначим $g_K(z) = f_K\left(\frac{iz+i}{1-z}\right)$. Тогда, согласно теореме x, $\|g_K(T)\|_1 \leqslant \mu$. Далее, $\forall x \in H_n$, $|n| > N$, выполнено $g_K(T)x = f_K(B)x$ при $K \geqslant n$. Переходя к пределу при $K \to \infty$, получим, что $\|\sum_{n\in J}\mathcal{P}_n\|_1 \leqslant \mu\|x\|_1$ на подпространстве $\overline{\cup_{|n|\geqslant N} H_n}$. Тогда для произвольного $x \in \mathbb{H}$:

$$\left\|\sum_{n\in J}\mathcal{P}_n x\right\|_1 = \left\|\sum_{n\in J}\mathcal{P}_n\left(x - \left(\sum_{|k|=N_0}^{N-1}\mathcal{P}_k + \mathcal{S}_{N_0}\right)x\right)\right\|_1 \leqslant \mu(1+\nu)\|x\|_1.$$

Если теперь $J \subset \{n \in \mathbb{Z} : |n| \geqslant N_0\} \cup \{0\}$ — конечное подмножество, то нормы $\|\sum_{n\in J}\mathcal{P}_n\|_1$ ограничены числом $\mu+\nu+\mu\nu$, не зависящим от J. $\square$

Список литературы

[1] *Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом// Изв. РАН. Сер. матем. — 2011. — *75*, № 3. — С. 3–28.

[2] *Велиев О. А., Шкаликов А. А.* О базисности Рисса собственных и присоединенных функций периодической и антипериодической задач Штурма-Лиувилля// Матем. заметки. — 2009. — *85*, № 5 С. 671–686.

[3] *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. — М.:Мир, 1984.

[4] *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.:Наука, 1965.

[5] *Кацнельсон В. Э.* Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов// Функц. анализ и его прил. — 1967. — *1*, № 2.— С. 39–51.

[6] *Келдыш М. В.* О полноте собственых функций некоторых классов несамосопряженных уравнений// Успехи матем. наук. — 1971. — *27*, № 4. — С. 15–47.

[7] *Кесельман Г. М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям конкретных дифференциальных операторов// Изв. Высших Учеб. Завед., сер. Матем. — 1964. — *39*, № 2.— С. 82–93.

[8] *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория Обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.:Изд. Иностранной Лит., 1958.

[9] *Корнев В. В., Хромов А. П.* Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и антипериодическими краевыми условиями// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — *13*, № 3. — С. 28–35.

[10] *Лунев А. А., Маламуд М. М.* О базисности Рисса системы корневых векторов для 2×2–системы типа Дирака// Докл. Акад. Наук. — 2014. — *458*, № 3. — С. 1–6.

[11] *Маркус А. С.* О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора// Доклады АН ССР. — 1962. — *142*, № 3. — С. 538–541.

[12] *Михайлов В. П.* О базисности Рисса в $L_2(0,1)$// Докл. Акад. Наук СССР. — 1962. — *144*. — С. 981–984.

[13] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.:Наука, 1969.

[14] *Рисс, Ф. Сёкефальви–Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.:Мир, 1979.

[15] *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Асимптотические формулы для фундаментальных решений системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом// Дифф. уравнения. — 2013. — *49*, № 5. — 573–584.

[16] *Садовничая И. В.* О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами — распределениями// Матем. сборник. — 2010. — *201*, №9. — С. 61–76.

[17] *Садовничая И. В.* Равносходимость в пространствах Гёльдера разложений по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами — распределениями// Дифф. уравнения. — 2012. — *48*, № 5. — С. 674–685.

[18] *Шкаликов А. А.* О свойстве базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора// Успехи Мат. Наук. — 1979. – -*34*, № 5. — С. 235–236.

[19] *Шкаликов А. А.* Граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравненийс параметром в краевых условиях// Труды сем. им. И. Г. Петровского. — 1983. — *9*. — С. 190–229.

[20] *Albeverio S., Hryniv R. O., Mykytyuk Ya* Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials// Russian J. Math. Phys. — 2005. — *12*, № 4. — С. 406–423.

[21] *Amirov R. Kh., Guseinov I. M.* Some classes of Dirac operators with singular potentials// Diff. Uravn. — 2004. — *40*, № 7. — С. 999–1001 [Differential Equations. — 2004. — *40*, № 7. — С. 1066–1068].

[22] *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear diferential equations containing a parameter// Trans. Amer. Math. Soc. — 1908. — *9*. — С. 21–231.

[23] *Birkhoff G. D.* Boundary value and expansion ploblems of ordinary linear diferential equations// Trans. Amer. Math. Soc. — 1908. — *9*. — С. 373–395.

[24] *Birkhoff G. D., Langer R. E.* The boundary problems and developments associated with a system of ordinary differential equations of the first order// Proc. Am. Acad. Arts Sci. — 1923. — *58.* — C. 49–128.
[25] *Djakov P., Mityagin B.* Bari–Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators// Mat. Nachr. — 2010. — *283*, № 3. — C. 443–462.
[26] *Djakov P., Mityagin B.* Criteria for existence of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators// J. Funct. Anal. — 2012. — *263.* — C. 2300–2332.
[27] *Djakov P., Mityagin B.* Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions// Indiana Univ. Math. J. — 2012. — *61*, № 1. — C. 359–398.
[28] *Dunford N.* A survey of the thoery of spectral operators// Bull. Amer. Math. Soc. — 1958. — *64.* — C. 217–274.
[29] *Levitan B. M., Sargsyan I. S.* Sturm–Liouville and Dirac operators. — Nauka, Moscow, 1988. [English transl.: Kluwer Academic Publishers, Dodrecht Boston London, 1991].
[30] *Lindelöf E.* Sur un principe général de l'analyse et ses applications á la théorie de la représentation conforme// Acta. Soc. Sc. Fennicae. —1915. — *46*, № 4. — C.6.
[31] *Lunyov A. A., Malamud M. M.* On the completeness of the root vectors for first order systems// Dokl. Math. — 2013. — *88*, № 3.— C. 678–683.
[32] *Malamud M. M., Oridoroga L. L.* On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations// J. Funct. Anal. — 2012. — *263.* — C. 1939–1980.
[33] *Markus A. S., Matsaev V. I.* Comparison theorems for spectra of linear operators, and spectral asymptotics// Tr. Mosk. Mat. Obshch. — 1982. — *45.* — C. 133-181 [Trans. Moscow Math. Soc. — 1984. — *1.*— C. 139–187].
[34] *Minkin A. M.* Equiconvergence theorems for differential operators. Functional analysis// 4.J. Math. Sci.(New York). — 1999. — *96*, № 6. — C. 3631–3715.
[35] *Sadovnichaya I. V.* Equiconvergence theorems for Sturm–Liouville operators with singular potentials (rate of equiconvergence in W_2^θ-norm)// Eurasian mathematical journal. — 2010. — *1*, № 1. — C. 137–146.
[36] *Savchuk A. M.* Spectral Properties of Dirac Operators on $(0,1)$ with summable potentials// The Sixth International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Abstracts, Moscow. — 2011. — C. 63.
[37] *Savchuk A. M., Shkalikov A. A.* The Dirac Operator with Complex–Valued Summable Potential// Math. Notes. — 2014. — *96*, № 5. — C. 3–36.
[38] *Shkalikov A. A.* Some problems in the theory of polynomial operator pencils// Uspekhi Mat. Nauk. — 1983. — *38*, № 3. — C. 189–190 [Russian Mathematical Surveys. — 1983. — *38*, № 3. — C. 51—152].
[39] *Tamarkin J. D.* Sur quelques points de la theorie des equations differentielles lineaires ordinaires et sur la generalisation de la serie de Fourier// Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1912. — *34*, № 2.— C. 345–382.
[40] *Tamarkin J. D.* On some general problems of the theory of ordinary linear differential operators and on expansion of arbitrary functions into series. — Petrograd, 1917. — 308c.
[41] *Tamarkin J. D.* Some general problems of the theory of linear differential equations and expansions of an arbitrary functions in series of fundamental functions// Math. Zeitschrift. — 1928. — *27*, № 1. — C. 1–54.
[42] *Trooshin I., Yamamoto M.* Riesz basis of root vectors of a nonsymmetric system of first-order ordinary differential operators and application to inverse eigenvalue problems// Appl. Anal. — 2001. — *80.* — C. 19–51.
[43] *Trooshin I., Yamamoto M.* Spectral properites and an inverse eigenvalue problem for nonsymmetric systems of ordinary differential equations// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2002. — *10*, № 6. — C. 643–658.

Россия, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико–математический факультет, Ленинские горы, д.1

E-mail address: `artem_savchuk@mail.ru, ivsad@yandex.ru`